نصابِ سلسلۂ تعلیم جامعۂ عثمانیہ

ہندسۂ مجسّمات

انٹرمیڈیٹ کی جماعتوں کے لئے بربنائے اسکول جومیٹری ہال اینڈ سٹیونز حصہ ششم

مترجمہ

قاضی محمد حسین صاحب ایم اے

پروفیسر ریاضیات عثمانیہ کالج حیدرآباد دکن

سنہ ۱۳۳۹ھ م سنہ ۱۳۳۰ف م سنہ ۱۹۲۰ع

مطبع دار الطبع کلیہ جامعہ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

مُقدّمہ

دنیا میں ہر قوم کی زندگی میں ایک ایسا زمانہ آتا ہے جب کہ اُس کے قوائے ذہنی میں انحطاط کے آثار نمودار ہونے لگتے ہیں، ایجاد و اختراع اور غور و فکر کا مادّہ تقریباً مفقود ہو جاتا ہے، تخیل کی پرواز اور نظر کی جولانی تنگ اور محدود ہو جاتی ہے، علم کا دار و مدار چند رسمی باتوں اور تقلید پر رہ جاتا ہے۔ اُس وقت قوم یا تو بیکار اور مردہ ہو جاتی ہے یا سنبھلنے کے لئے یہ لازم ہوتا ہے کہ وہ دوسری ترقی یافتہ اقوام کا اثر قبول کرے۔ تاریخ عالم کے ہر دور میں اس کی شہادتیں موجود ہیں۔ خود ہمارے دیکھتے دیکھتے جاپان پر یہی گذری اور یہی حالت اب ہندوستان کی ہے۔

جس طرح کوئی شخص دوسرے بنی نوع انسان سے قطع تعلق کرکے تنہا اور الگ تھلگ نہیں رہ سکتا اور اگر رہے تو پنپ

نہیں سکتا اسی طرح یہ بھی ممکن نہیں کہ کوئی قوم دیگر
اقوام عالم سے بے نیاز ہو کر پھولے پھلے اور ترقی پائے۔
جس طرح ہوا کے جھونکے اور ادنیٰ پرندوں اور کیڑے
مکوڑوں کے اثر سے وہ مقامات تک ہرے بھرے رہتے ہیں
جہاں انسان کی دسترس نہیں اسی طرح انسانوں اور قوموں کے اثر
بھی ایک دوسرے تک اڑ کر پہنچتے ہیں۔ جس طرح **یونان** کا اثر روما
اور دیگر اقوام **یورپ** پر پڑا جس طرح **عرب** نے **عجم** کو
اور **عجم** نے **عرب** کو اپنا فیض پہنچایا، جس طرح اسلام نے
یورپ میں تاریکی اور جہالت کو مٹا کر علم کی روشنی پہنچائی
اسی طرح آج ہم بھی بہت سی باتوں میں مغرب کے محتاج ہیں۔
یہ قانون عالم ہے جو یوں ہی جاری رہا اور جاری رہیگا۔

"دئے سے دیا یوں ہی جلتا رہا ہے"

جب کسی قوم کی نوبت یہاں تک پہنچ جاتی ہے اور وہ
آگے قدم بڑھانے کی سعی کرتی ہے تو ادبیات کے میدان میں
پہلی منزل ترجمہ ہوتی ہے۔ اس لئے کہ جب قوم میں جدت
اور اپج نہیں رہی تو ظاہر ہے کہ اس کی تصانیف معمولی،
ادھوری، کم مایہ اور ادنیٰ ہونگی۔ اُس وقت قوم کی بڑی خدمت
یہی ہے کہ ترجمہ کے ذریعہ سے دنیا کی اعلیٰ درجہ کی تصانیف اپنی
زبان میں لائی جائیں۔ یہی ترجمے خیالات میں تغیر اور معلومات
میں اضافہ کریں گے، جمود کو توڑیں گے اور قوم میں ایک
نئی حرکت پیدا کریں گے اور پھر آخر یہی ترجمے تصنیف و تالیف

کے جدید اسلوب اور ڈھنگ سمجھائیں گے۔ ایسے وقت میں ترجمہ تصنیف سے زیادہ قابل قدر، زیادہ مفید اور زیادہ فیض رساں ہوتا ہے۔

اسی اصول کی بنا پر جب عثمانیہ یونیورسٹی کی تجویز پیش ہوئی تو ہز اکزالٹڈ ہائینس رستمِ دوراں ارسطوئے زماں سپہ سالار آصف جاہ مظفر الممالک نظام الملک نظام الدولہ نواب میر عثمان علیخان بہادر فتح جنگ جی۔سی۔اس۔آئی۔جی۔سی۔بی۔ای۔والی حیدرآباد دکن خلد اللہ ملکہ و سلطنتہ نے جن کی علمی قدردانی اور علمی سرپرستی اس زمانہ میں احیائے علوم کے حق میں آب حیات کا کام کر رہی ہے، بہ تقاضائے مصلحت و دوربینی سب سے اول سررشتۂ تالیف و ترجمہ کے قیام کی منظوری عطا فرمائی جو نہ صرف یونیورسٹی کے لئے نصاب تعلیم کی کتابیں تیار کریگا بلکہ ملک میں نشر و اشاعتِ علوم و فنون کا کام بھی انجام دیگا۔ اگرچہ اس سے قبل بھی یہ کام ہندوستان کے مختلف مقامات میں تھوڑا تھوڑا انجام پایا مثلاً فورٹ ولیم کالج کلکتہ میں زیر نگرانی ڈاکٹر گلکرسٹ، دہلی سوسائٹی میں، انجمن پنجاب میں زیر نگرانی ڈاکٹر لائٹنر و کرنل ہالرائڈ، علی گڑھ سائنٹفک انسٹیوٹ میں جس کی بنا سر سیّد احمد خاں مرحوم نے ڈالی۔ مگر یہ کوششیں سب وقتی اور عارضی تھیں۔ نہ اُنکے پاس کافی سرمایہ اور سامان تھا نہ انہیں یہ موقع حاصل تھا

اور نہ انہیں اعلیٰحضرت و اقدس جیسے علم پرور
فرمانروا کی سرپرستی کا شرف حاصل تھا - یہ پہلا وقت ہے کہ
اردو زبان کو علوم و فنون سے مالا مال کرنے کے لئے باقاعدہ
اور مستقل کوشش کی گئی ہے - اور یہ پہلا وقت ہے کہ
اردو زبان کو یہ رتبہ ملا ہے کہ وہ اعلیٰ تعلیم کا ذریعہ قرار
پائی ہے - احیائے علوم کے لئے جو کام آگسٹس نے رومہ میں
خلافت عباسیہ میں ہارون الرشید و مامون الرشید نے ہسپانیہ میں
عبدالرحمٰن ثالث نے' بکرماجیت و اکبر نے ہندوستان میں
الفرڈ نے انگلستان میں' پیٹر اعظم و کیتھرائن نے روس میں
اور مُت شی ہٹو نے جاپان میں کیا' وہی فرمانروائے دولت
آصفیہ نے اس ملک کے لئے کیا۔ اعلیٰحضرت واقدس
کا یہ کارنامہ ہندوستان کی علمی تاریخ میں ہمیشہ فخر و مباہات
کے ساتھ ذکر کیا جائیگا -

منجملہ اُن اسباب کے جو قومی ترقی کا موجب ہوتے ہیں ایک
بڑا سبب زبان کی تکمیل ہے - جس قدر جو قوم زیادہ ترقی یافتہ
ہے اُسی قدر اُس کی زبان وسیع اور اس میں نازک خیالات
اور علمی مطالب کے ادا کرنے کی زیادہ صلاحیت ہوتی ہے'
اور جس قدر جس قوم کی زبان محدود ہوتی ہے اُسی قدر تہذیب
و شایستگی بلکہ انسانیت میں اس کا درجہ کم ہوتا ہے - چنانچہ
وحشی اقوام میں الفاظ کا ذخیرہ بہت ہی کم پایا گیا ہے - علمائے
فلسفہ و علم اللسان نے یہ ثابت کیا ہے کہ زبان' خیال اور

خیال، زبان ہے اور ایک مدت کے بعد اس نتیجے پر پہنچے ہیں
کہ انسانی دماغ کے صحیح تاریخی ارتقا کا علم، زبان کی تاریخ
کے مطالعہ سے حاصل ہو سکتا ہے۔ الفاظ ہمیں سوچنے میں
ویسی ہی مدد دیتے ہیں جیسی آنکھیں دیکھنے میں۔ اس لئے
زبان کی ترقی درحقیقت عقل کی ترقی ہے۔

علمِ ادب اسی قدر وسیع ہے جس قدر حیاتِ انسانی۔ اور
اس کا اثر زندگی کے ہر شعبہ پر پڑتا ہے۔ وہ نہ صرف انسان
کی ذہنی، معاشرتی، سیاسی ترقی میں مدد دیتا، اور نظر میں وسعت،
دماغ میں روشنی، دلوں میں حرکت اور خیالات میں تغیر پیدا کرتا
ہے بلکہ قوموں کے بنانے میں ایک قوی آلہ ہے۔ قومیت کے
لئے ہم خیالی شرط ہے اور ہم خیالی کے لئے ہم زبانی لازم۔
گویا یک زبانی قومیت کا شیرازہ ہے جو اسے منتشر ہونے سے
بچائے رکھتا ہے۔ ایک زمانہ تھا جب کہ مسلمان اقطاع عالم میں
پھیلے ہوئے تھے لیکن اُن کے علم ادب اور زبان نے انہیں
ہر جگہ ایک کر رکھا تھا۔ اس زمانے میں انگریز ایک دنیا پر
چھائے ہوئے ہیں لیکن باوجود بُعدِ مسافت و اختلافِ حالات
یک زبانی کی بدولت قومیت کے ایک سلسلے میں منسلک
ہیں، زبان میں جادو کا سا اثر ہے اور صرف افراد ہی پر
نہیں بلکہ اقوام پر بھی اُس کا وہی تسلط ہے۔

یہی وجہ ہے کہ تعلیم کا صحیح اور فطرتی ذریعہ اپنی ہی زبان
ہو سکتی ہے۔ اس امر کو اعلیٰحضرت واقدس نے

پہچانا اور جامعۂ عثمانیہ کی بنیاد ڈالی۔ جامعۂ عثمانیہ ہندوستان
میں پہلی یونیورسٹی ہے جس میں ابتدا سے انتہا تک ذریعۂ تعلیم
ایک دیسی زبان ہوگا۔ اور یہ زبان اردو ہوگی۔ ایک ایسے
ملک میں جہاں "بھانت بھانت کی بولیاں" بولی جاتی ہیں،
جہاں ہر صوبہ ایک نیا عالم ہے، صرف اردو ہی ایک عام
اور مشترک زبان ہو سکتی ہے۔ یہ اہل ہند کے میل جول سے
پیدا ہوئی اور اب بھی یہی اس فرض کو انجام دیگی۔ یہ اس
کے خمیر اور وضع و ترکیب میں ہے۔ اس لئے یہی تعلیم اور
تبادلہ خیالات کا واسطہ بن سکتی اور قومی زبان کا دعوے
کر سکتی ہے۔

جب تعلیم کا ذریعہ اردو قرار دیا گیا تو یہ کھلا اعتراض
تھا کہ اردو میں اعلیٰ تعلیم کے لئے کتابوں کا ذخیرہ کہاں ہے
اور ساتھ ہی یہ بھی کہا جاتا تھا کہ اردو میں یہ صلاحیت ہی
نہیں کہ اس میں علوم و فنون کی اعلیٰ تعلیم ہو سکے۔ یہ صحیح
ہے کہ اردو میں اعلیٰ تعلیم کے لئے کافی ذخیرہ نہیں۔ اور اردو ہی
پر کیا منحصر ہے، ہندوستان کی کسی زبان میں بھی نہیں۔ یہ
طلب و رسد کا عام مسئلہ ہے۔ جب مانگ ہی نہ تھی تو رسد
کہاں سے آتی۔ جب ضرورت ہی نہ تھی تو کتابیں کیونکر
مہیا ہوتیں۔ ہماری اعلیٰ تعلیم غیر زبان میں ہوتی تھی، تو علوم
و فنون کا ذخیرہ ہماری زبان میں کہاں سے آتا۔ ضرورت ایجاد
کی ماں ہے۔ اب ضرورت محسوس ہوئی ہے تو کتابیں بھی

مہیا ہو جائیں گی۔ اسی کمی کو پورا کرنے اور اسی ضرورت کو رفع کرنے کے لئے سررشتۂ تالیف و ترجمہ قائم کیا گیا۔ یہ صحیح نہیں ہے کہ اردو زبان میں اس کی صلاحیت نہیں۔ اس کے لئے کسی دلیل و برہان کی ضرورت نہیں۔ سررشتۂ تالیف و ترجمہ کا وجود اس کا شافی جواب ہے۔ یہ سررشتہ یہی کام کر رہا ہے۔ کتابیں تالیف و ترجمہ ہو رہی ہیں اور چند روز میں عثمانیہ یونیورسٹی کالج کے طالب علموں کے ہاتھوں میں ہونگی اور رفتہ رفتہ عام شائقینِ علم تک پہنچ جائیں گی۔

لیکن اس میں سب سے کٹھن اور سنگلاخ مرحلہ وضع اصطلاحات کا تھا۔ اس میں بہت کچھ اختلاف اور بحث کی گنجائش ہے۔ اس بارے میں ایک مدت کے تجربہ اور کامل غور و فکر اور مشورہ کے بعد میری یہ رائے قرار پائی ہے کہ تنہا نہ تو ماہرِ علم صحیح طور سے اصطلاحات وضع کر سکتا ہے اور نہ ماہرِ لسان۔ ایک کو دوسرے کی ضرورت ہے۔ اور ایک کی کمی دوسرا پورا کرتا ہے۔ اس لئے اس اہم کام کو صحیح طور سے انجام دینے کے لئے یہ ضروری ہے کہ دونوں یک جا جمع کئے جائیں تاکہ وہ ایک دوسرے کے مشورہ اور مدد سے ایسی اصطلاحیں بنائیں جو نہ اہل علم کو ناگوار ہوں نہ اہل زبان کو۔ چنانچہ اسی اصول پر ہم نے وضع اصطلاحات کے لئے ایک ایسی مجلس بنائی جس میں دونوں جماعتوں کے اصحاب شریک ہیں۔ علاوہ ان کے

ہم نے اُن اہلِ علم سے بھی مشورہ کیا جو اس کی خاص اہلیت رکھتے ہیں اور بُعدِ مسافت کی وجہ سے ہماری مجلس میں شریک نہیں ہو سکتے ۔ اس میں شک نہیں کہ بعض الفاظ غیرمانوس معلوم ہوں گے اور اہلِ زبان انہیں دیکھ کر ناک بھوں چڑھائیں گے ۔ لیکن اس سے گزیر نہیں ۔ ہمیں بعض ایسے علوم سے واسطہ ہے جن کی ہوا تک ہماری زبان کو نہیں لگی۔ ایسی صورت میں سوائے اس کے چارہ نہیں کہ جب ہماری زبان کے موجودہ الفاظ خاص خاص مفہوم کے ادا کرنے سے قاصر ہوں تو ہم جدید الفاظ وضع کریں ۔ لیکن اس کے یہ معنی نہیں ہیں کہ ہم نے محض ٹالنے کے لئے زبردستی الفاظ گھڑ کر رکھ دئے ہیں، بلکہ جس نہج پر اب تک الفاظ بنتے چلے آئے ہیں اور جن اصولِ ترکیب و اشتقاق پر اب تک ہماری زبان کاربند رہی ہے ، اس کی پوری پابندی ہم نے کی ہے ۔ ہم نے اُس وقت تک کسی لفظ کے بنانے کی جرأت نہیں کی جب تک اُسی قسم کی متعدد مثالیں ہمارے پیش نظر نہ رہی ہوں ۔ ہماری رائے میں جدید الفاظ کے وضع کرنے کی اس سے بہتر اور صحیح کوئی صورت نہیں۔ اب اگر کوئی لفظ غیرمانوس یا اجنبی معلوم ہو تو اس میں ہمارا قصور نہیں ۔ جو زبان زیادہ تر شعر و شاعری اور قصص تک محدود ہو، وہاں ایسا ہونا کچھ تعجب کی بات نہیں ۔ جس ملک سے ایجاد و اختراع کا مادّہ سلب ہو گیا ہو جہاں لوگ نئی چیزوں کے بنانے اور دیکھنے کے عادی نہ ہوں، وہاں جدید الفاظ کا

غیر مانوس اور اجنبی معلوم ہونا موجب حیرت نہیں۔ الفاظ کی حالت بھی انسانوں کی سی ہے۔ اجنبی شخص بھی رفتہ رفتہ مانوس ہو جاتے ہیں۔ اول اول الفاظ کا بھی یہی حال ہے۔ استعمال آہستہ آہستہ غیر مانوس کو مانوس کر دیتا ہے اور صحت و غیر صحت کا فیصلہ زمانہ کے ہاتھ میں ہوتا ہے۔ ہمارا فرض یہ ہے کہ لفظ تجویز کرتے وقت ہر پہلو پر کامل غور کرلیں، آئندہ چل کر اگر وہ استعمال اور زمانہ کی کسوٹی پر پورا اترا تو خود ٹکسالی ہو جائیگا اور اپنی جگہ آپ پیدا کرلیگا۔ علاوہ اس کے جو الفاظ پیش کئے گئے ہیں وہ الہامی نہیں کہ جن میں ردّ و بدل نہ ہوسکے، بلکہ فرہنگِ اصطلاحاتِ عثمانیہ جو زیر ترتیب ہے پہلے اس کا مسودہ اہل علم کی خدمت میں پیش کیا جائے گا اور جہاں تک ممکن ہوگا اس کی اصلاح میں کوئی دقیقہ فروگذاشت نہیں کیا جائے گا۔

لیکن ہماری مشکلات صرف اصطلاحات علمیہ تک ہی محدود نہیں ہیں۔ ہمیں ایک ایسی زبان سے ترجمہ کرنا پڑتا ہے جو ہمارے لئے بالکل اجنبی ہے، اس میں اور ہماری زبان میں کسی قسم کا کوئی رشتہ یا تعلق نہیں۔ اس کا طرز بیان، ادائے مطلب کے اسلوب، محاورات وغیرہ بالکل جدا ہیں۔ جو الفاظ اور جملے انگریزی زبان میں بالکل معمولی اور روز مرہ کے استعمال میں آتے ہیں، اُن کا ترجمہ جب ہم اپنی زبان میں کرنے بیٹھتے ہیں تو سخت دشواری پیش آتی ہے۔ ان تمام دشواریوں پر

غالب آنے کے لئے مترجم کو کیسا کچھ خونِ جگر کھانا نہیں پڑتا۔ ترجمہ کا کام، جیسا کہ عموماً خیال کیا جاتا ہے، کچھ آسان کام نہیں ہے ۔ بہت خاک چھاننی پڑتی ہے تب کہیں گوہر مقصود ہاتھ آتا ہے ۔

اس سررشتہ کا کام صرف یہی نہ ہوگا (اگرچہ یہ اس کا فرضِ اولین ہے) کہ وہ نصاب تعلیم کی کتابیں تیار کرے، بلکہ اس کے علاوہ وہ ہر علم پر متعدد اور کثرت سے کتابیں تالیف و ترجمہ کرائے گا، تاکہ لوگوں میں علم کا شوق بڑھے، ملک میں روشنی پھیلے، خیالات و قلوب پر اثر پیدا ہو، جہالت کا استیصال ہو۔ جہالت کے معنی اب لاعلمی ہی کے نہیں بلکہ اس میں افلاس، کم ہمتی، تنگ دلی، کوتہ نظری، بے غیرتی، بد اخلاقی سب کچھ آجاتا ہے ۔ جہالت کا مقابلہ کرکے اسے پس پا کرنا سب سے بڑا کام ہے ۔ انسانی دماغ کی ترقی علم کی ترقی ہے۔ انسانی ترقی کی تاریخ علم کی اشاعت و ترقی کی تاریخ ہے ۔ ابتدائے آفرینش سے اس وقت تک انسان نے جو کچھ کیا ہے، اگر اس پر ایک وسیع نظر ڈالی جائے تو نتیجہ یہ نکلے گا کہ جوں جوں علم میں اضافہ ہوتا گیا، پچھلی غلطیوں کی صحت ہوتی گئی، تاریکی گھٹتی گئی، روشنی بڑھتی گئی، انسان میدانِ ترقی میں قدم آگے بڑھاتا گیا ۔ اسی مقدس فرض کے ادا کرنے کے لئے یہ سررشتہ قائم کیا گیا ہے اور وہ اپنی بساط کے موافق اس کے انجام دینے میں کوتاہی نہ کرے گا ۔

لیکن غلطی، تحقیق و جستجو کی گھات میں لگی رہتی ہے ۔ ادب کا

کال ذوق سلیم ہر ایک کو نصیب نہیں ہوتا۔ بڑے بڑے نقاد اور مبصر کاش غلطیاں کر جاتے ہیں۔ لیکن اس سے ان کے کام پر حرف نہیں آتا۔ غلطی ترقی کے مانع نہیں ہے، بلکہ وہ صحت کی طرف رہنمائی کرتی ہے۔ پچھلوں کی بھول چوک آنے والے مسافر کو رستہ بھٹکنے سے بچا دیتی ہے۔ ایک جاپانی ماہر تعلیم (بیرن کی کوچی) نے اپنے ملک کا تعلیمی حال لکھتے ہوئے اس صحیح کیفیت کا ذکر کیا ہے جو ہونہار اور ترقی کرنے والے افراد اور اقوام پر گزرتی ہے۔

"ہم نے بہت سے تجربے کئے اور بہت سی ناکامیاں اور غلطیاں ہوئیں، لیکن ہم نے ان سے نئے سبق سیکھے اور فائدہ اٹھایا۔ رفتہ رفتہ ہمیں اپنے ملک کی تعلیمی ضروریات اور امکانات کا صحیح اور بہتر علم ہوتا گیا اور ایسے تعلیمی طریقے معلوم ہوتے گئے جو ہمارے اہل وطن کے لئے زیادہ موزوں تھے۔ ابھی بہت سے ایسے مسائل ہیں جو ہمیں حل کرنے ہیں، بہت سی ایسی اصلاحیں ہیں جو ہمیں عمل میں لانی ہیں، ہم نے اب تک کوشش کی اور ابھی کوشش کر رہے ہیں اور مختلف طریقوں کی برائیاں اور بھلائیاں دریافت کرنے کے درپے ہیں، تاکہ اپنے ملک کے فائدے کے لئے اچھی باتوں کو اختیار کریں اور رواج دیں اور برائیوں سے بچیں"

اس لئے جو حضرات ہمارے کام پر تنقیدی نظر ڈالیں انہیں وقت کی تنگی، کام کا ہجوم اور اس کی اہمیت اور ہماری مشکلات پیش نظر رکھنی چاہئیں۔ یہ پہلی سعی ہے اور پہلی سعی میں کچھ نہ کچھ خامیاں

ضرور رہ جاتی ہیں، لیکن آگے چل کر یہی خامیاں ہماری رہنما بنیں گی اور پختگی اور اصلاح تک پہنچائیں گی۔ یہ نقش اول ہے نقش ثانی اس سے بہتر ہوگا۔ ضرورت کا احساس علم کا شوق، حقیقت کی لگن، صحت کی ٹوہ، جد وجہد کی رسائی خود بخود ترقی کے مدارج طے کرلے گی۔

جاپانی بڑے فخر سے یہ کہتے ہیں کہ ہم نے تیس چالیس سال کے عرصے میں وہ کچھ کر دکھایا جس کے انجام دینے میں یورپ کو اتنی ہی صدیاں صرف کرنی پڑیں۔ کیا کوئی دن ایسا آئے گا کہ ہم بھی یہ کہنے کے قابل ہوں گے؟ ہم نے پہلی شرط پوری کردی ہے یعنی بیجا قیود سے آزاد ہوکر اپنی زبان کو اعلیٰ تعلیم کا ذریعہ قرار دیا ہے۔ لوگ ابھی ہمارے کام کو تذبذب کی نگاہ سے دیکھ رہے ہیں اور ہماری زبان کی قابلیت کی طرف مشتبہ نظریں ڈال رہے ہیں۔ لیکن وہ دن آنے والا ہے کہ اس ذرّے کا بھی ستارہ چمکے گا، یہ زبان علم و حکمت سے مالا مال ہوگی اور اعلیٰحضرت واقدس کی نظر کیمیا اثر کی بدولت یہ دنیا کی مہذب و شایستہ زبانوں کی ہمسری کا دعوے کرے گی۔ اگرچہ اُس وقت ہماری سعی اور محنت حقیر معلوم ہوگی، مگر یہی شامِ غربت صبح وطن کی آمد کی خبر دے رہی ہے، یہی شب بیداریاں روزِ روشن کا جلوہ دکھائیں گی، اور یہی مشقت اُس قصر رفیع الشان کی بنیاد ہوگی جو آئندہ تعمیر ہونے والا ہے۔ اس وقت ہمارا کام صبر و استقلال سے میدان صاف کرنا،

داغ بیل ڈالنا اور نیو کھودنا ہے، اور فرہاد وار شیرینِ حکمت کی خاطر سنگلاخ پہاڑوں کو کھود کھود کر جوئے علم لانے کی سعی کرنا ہے۔ اور گو ہم نہ ہوں گے مگر ایک زمانہ آئیگا جب کہ اس میں علم و حکمت کے دریا بہیں گے اور ادبیات کی افتادہ زمین سرسبز و شاداب نظر آئے گی۔

آخر میں میں سررشتہ کے مترجمین کا شکریہ ادا کرتا ہوں جنہوں نے اپنے فرض کو بڑی مستعدی اور شوق سے انجام دیا۔ نیز میں ارکانِ مجلسِ وضعِ اصطلاحات کا شکر گزار ہوں کہ ان کے مفید مشورے اور تحقیق کی مدد سے یہ مشکل کام بخوبی انجام پا رہا ہے۔ لیکن خصوصیت کے ساتھ یہ سررشتہ جناب مسٹر محمد اکبر حیدری بی۔ اے معتمد عدالت و تعلیمات و کوتوالی و امور عامہ سرکار عالی کا ممنون ہے جنہیں ابتدا سے قیام و انتظام جامعۂ عثمانیہ میں خاص انہماک رہا ہے۔ اور اگر ان کی توجہ اور امداد ہمارے شریک حال نہ ہوتی تو یہ عظیم الشان کام صورت پذیر نہ ہوتا۔ میں سید راس مسعود صاحب بی۔ اے (آکسن) آئی۔ اِی۔ ایس۔ ناظمِ تعلیمات سرکار عالی کا بھی شکریہ ادا کرتا ہوں کہ ان کی توجہ اور عنایت ہمارے حال پر مبذول رہی اور ضرورت کے وقت ہمیشہ بلا تکلف خوشی کے ساتھ ہمیں مدد دی۔

عبد الحق

ناظمِ سررشتۂ تالیف و ترجمہ (عثمانیہ یونیورسٹی)

مولوی عبدالحق صاحب بی۔ اے۔۔۔۔۔۔۔۔۔ ناظم۔

قاضی محمد حسین صاحب۔ ایم۔ اے۔ رینگلر۔۔۔۔ مترجم ریاضیات

چودھری برکت علی صاحب بی۔ ایس۔ سی۔۔۔۔۔ مترجم سائینس

مولوی سید ہاشمی صاحب۔۔۔۔۔۔۔۔ مترجم تاریخ۔

مولوی محمد الیاس صاحب برنی ایم۔ اے۔۔۔۔ مترجم معاشیات

قاضی تلمذ حسین صاحب ایم۔ اے۔۔۔۔۔۔ مترجم سیاسیات

مولوی ظفر علی خاں صاحب بی۔ اے۔۔۔۔۔ مترجم تاریخ۔

مولوی عبدالماجد صاحب بی۔ اے۔۔۔۔۔ مترجم فلسفہ ومنطق

مولوی عبدالحلیم صاحب شرر۔۔۔۔۔۔۔ مولف تاریخ اسلام

مولوی سید علی رضا صاحب بی۔ اے۔۔۔۔۔ مترجم قانون۔

مولوی عبداللہ العمادی صاحب۔۔۔۔۔ مترجم کتب عربی

علاوہ ان مذکورۂ بالا مترجمین کے مولوی حاجی صفی الدین صاحب ترجمہ شدہ کتابوں کو مذہبی نقطۂ نظر سے دیکھنے کے لئے اور نواب حیدر یار جنگ (مولوی علی حیدر صاحب طبا طبائی) ترجموں پر نظر ثانی کرنے کے لئے مقرر فرمائے گئے ہیں+

مولوی مرزا مہدی خاں صاحب کوکب   وظیفہ یاب سرکار عالی (سابق ناظم مردم شماری)

مولوی حمیدالدین صاحب بی۔اے   صدر دارالعلوم

نواب حیدر یار جنگ (مولوی علی حیدر صاحب طباطبائی)

مولوی وحیدالدین صاحب سلیم

مولوی عبدالحق بی۔اے   ناظم سررشتہ تالیف و ترجمہ

علاوہ ان مستقل ارکان کے، مترجمین سررشتہ تالیف و ترجمہ نیز دوسرے اصحاب سے بلحاظ اُنکے فن کے مشورہ کیا گیا۔ مثلاً

خان فضل محمد خانصاحب ایم۔اے رنگلر (پرنسپل سٹی ہائی اسکول حیدرآباد)

مولوی عبدالواسع صاحب (پروفیسر دارالعلوم حیدرآباد)

پروفیسر عبدالرحمن صاحب۔بی۔ایس۔سی (نظام کالج)

مرزا محمد ہادی صاحب۔بی۔اے (پروفیسر کرسچن کالج لکھنؤ)

مولوی سلیمان صاحب ندوی

سید راس مسعود صاحب بی۔اے (ناظم تعلیمات حیدرآباد)   وغیرہ

فہرست مضامین

ہندسۂ مجسمات

ہندسۂ مجسّمات

خطوط و سطوح

تعریفات اور ابتدائی اصول

۱۔ اسکول جومیٹری، حصّہ اول کی تعریفات کے بموجب

(۱) نقطہ وہ ہندسی مقدار ہے جس کی نہ لمبائی ہو، نہ چوڑائی اور نہ موٹائی۔ (نقطہ کے طول، عرض، عمق تینوں نہیں ہوتے)

(۲) خط کی صرف لمبائی ہوتی ہے، لیکن چوڑائی اور موٹائی نہیں ہوتی۔

(۳) سطح کی لمبائی اور چوڑائی دونوں ہوتی ہیں، لیکن اس کی موٹائی نہیں ہوتی۔

(۴) مجسم لمبائی، چوڑائی اور موٹائی تینوں رکھتا ہے۔

پس نقطہ کا کوئی بُعد نہیں ہوتا

خط کا ایک بُعد ہوتا ہے

سطح کے دو بُعد ہوتے ہیں

مجسم کے تین بُعد ہوتے ہیں

۲- پس مجسم، سطحیں، خط، نقطے باہم یہ تعلق رکھتے ہیں-

(۱) سطحیں مجسموں کا احاطہ کرتی ہیں -

(۲) خط سطحوں کا احاطہ کرتے ہیں، اور سطحوں کا تقاطع خطوط پر ہوتا ہے -

(۳) خطوط کی حدبندی نقطوں سے ہوتی ہے اور خط ایک دوسرے کو نقطوں پر قطع کرتے ہیں -

یہ بھی یاد رکھنا چاہیئے کہ ایک خط کسی سطح کو ایک یا ایک سے زیادہ نقطوں پر قطع کرسکتا ہے -

۳- سطح مستوی یا محض مستوی سے مراد وہ سطح ہے کہ اگر اس پر کوئی دو نقطے لئے جائیں تو ان نقطوں کو ملانے والا مستقیم خط بالتمام سطح مذکور میں واقع ہو -

جب تک اس کے خلاف بالتصریح نہ بیان کیا جائے اس حصہ میں خطوط مستقیم سے غیر متناہی طول کے مستقیم خط مراد ہونگے اور مستوی سطحوں سے غیر متناہی وسعت کی سطحیں مراد ہونگی-

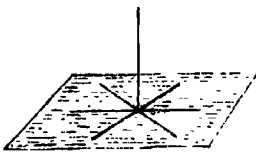
۴- جو خط ایک مستوی سطح میں کھینچے جائیں یا جن میں سے ایک مستوی سطح گزر سکے ان کو ہم سطح خط کہتے ہیں

۵- جن خطوں میں سے کوئی مستوی سطح نہ گزر سکے ان کو کانٹے یا معوج خط کہتے ہیں-

۶- مستوی سطحیں متوازی اُس وقت کہلاتی ہیں جبکہ وہ ایک دوسرے کو نہ ملیں خواہ انہیں کتنا ہی بڑھایا جائے یا کتنی

ہی وسعت دی جائے۔

۷۔ ایک خط مستقیم اور سطح مستوی باہم متوازی اُس وقت ہوتے ہیں جبکہ وہ ایک دوسرے سے نہ ملیں خواہ انہیں کتنا ہی بڑھایا جائے۔

۸۔ ایک مستقیم خط، کسی مستوی سطح پر عمود اُس وقت ہوتا ہے جب یہ اس سطح پر کے ہر ایک خط سے جو اس سے ملتا ہو زاویہ قائمہ بنائے، اس کو اس طرح بھی بیان کرتے ہیں کہ یہ خط سطح مستوی پر عماد ہے۔

علوم متعارفہ

۱۔ ایک مستقیم خط کسی مستوی سطح پر کے دو نقطوں کو ملاتا ہے، اس خط کو خواہ کتنا ہی خارج کیا جائے یہ بالتمام اسی سطح میں واقع ہوگا۔

۲۔ ایک مستقیم خط میں سے یا دو نقاط مفروضہ میں سے بیشمار مستوی سطحیں گزر سکتی ہیں، کیونکہ ظاہر ہے کہ اگر ایک مستوی سطح کو ایک ایسے مستقیم خط کے گرد جو اس میں واقع ہو گھمایا جائے تو یہ بالتواتر بیشمار مقامات میں سے گزرے گی۔

۳۔ اگر ایک لا محدود مستوی سطح ایک ایسے مستقیم خط کے گرد

گھومے جو اس میں واقع ہو تو یہ سطح فضا کے کسی ایسے نقطہ میں سے جو خطِ مذکور کے باہر ہو گزاری جا سکتی ہے۔

ان اصولوں سے یہ واضح ہوتا ہے کہ ایک مستقیم خط کا تعلق کسی مستوی سطح کے ساتھ تین طرح کا ہو سکتا ہے۔

(۱) یا یہ مستقیم خط، سطح مستوی کے متوازی ہوگا جس صورت میں اس کا کوئی نقطہ سطح مستوی کے ساتھ مشترک نہ ہوگا

(۲) یا یہ خط، سطح مستوی کو کاٹیگا، جس صورت میں اسکا ایک (اور صرف ایک ہی) نقطہ سطح مستوی کے ساتھ مشترک ہوگا۔

(۳) یا یہ سطح مستوی میں واقع ہوگا، جس صورت میں اس کے لا انتہا نقطے سطح مستوی کے ساتھ مشترک ہونگے۔

نیز ایک مستقیم خط کا تعلق کسی اور مستقیم خط کے ساتھ تین طرح کا ہو سکتا ہے

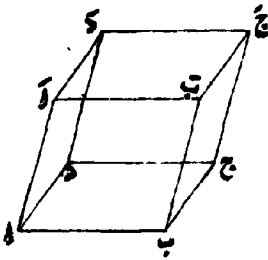
اگر خطوط ہم سطح ہوں تو

(۱) یہ ایک دوسرے کو قطع کرینگے

یا (۲) ایک دوسرے کے متوازی ہونگے

اگر خطوط ہم سطح نہ ہوں تو

(۳) نہ یہ ایک دوسرے کو قطع کریں گے اور نہ متوازی ہونگے۔

مثلاً ساتھ کی شکل میں (۱) کنارے ا ب، ب ج مستوی سطح ا ب ج د میں واقع ہیں اور ایک دوسرے کو قطع کرتے

ہیں۔ (۲) اب اور
دج ایک ہی سطح میں
ہیں اور ایک دوسرے
کے متوازی ہیں (۳)
اب اور اَدَ میں
سے کوئی مستوی سطح نہیں
گزر سکتی، یہ کاٹنے خط
ہیں اس لئے نہ یہ متقاطع ہیں اور نہ متوازی۔

مسئلہ اثباتی ۱ [اقلیدس م ۱۱ ش ۲]

دو متقاطع خطوطِ مستقیم میں سے ایک اور صرف ایک ہی سطح مستوی گزر سکتی ہے۔

فرض کرو کہ خطوطِ مفروضہ اب اور ج د ایک دوسرے کو ع پر قطع کرتے ہیں۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے
کہ اب اور ج د میں سے
ایک اور صرف ایک ہی سطح
مستوی گزر سکتی ہے۔

ثبوت۔ کوئی سطح مستوی لاما ایسی
لو جو اع ب میں سے گزرتی ہو، تب اس سطح مستوی کو
اب کے گرد اتنا گھماؤ کہ یہ نقطہ ج میں سے گزرے اور

گاما کے مقام پر آجائے، اس طرح سے گھومنے والی سطح مستوی کا مقام متعین ہو جائے گا۔ اس سے ثابت ہوا کہ صرف ایک ہی سطح مستوی خط مستقیم اب اور نقطہ ج میں سے گزر سکتی ہے، اور یہی ثابت کرنا تھا۔

نتیجہ صریح ۔ اگر تین مستقیم خط ایسے ہوں کہ اُن میں سے کوئی دو ایک دوسرے کو قطع کریں، تو یہ تینوں خط ایک ہی سطح مستوی میں واقع ہونگے۔

نتائج

کسی سطح مستوی کا مقام متعین ہو جاتا ہے اگر یہ

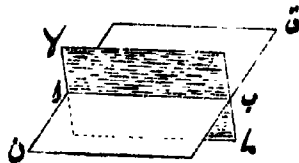
(۱) ایک دئے ہوئے خط مستقیم میں سے اور ایک ایسے نقطہ میں سے جو اس خط کے باہر واقع ہو گزرے۔

(۲) دو متقاطع مستقیم خطوں میں سے گزرے۔

(۳) تین ایسے نقاط میں سے گزرے جو ایک ہی خط مستقیم پر واقع نہ ہوں۔

(۴) دو متوازی مستقیم خطوں میں سے گزرے۔

مسئلہ اثباتی ۲ [اقلیدس م ۱۱ ش ۳]

دو متقاطع مستوی سطحیں ایک دوسرے کو ایک خط مستقیم پر کاٹتی ہیں اور اس خط کے باہر کسی اور نقطہ پر نہیں کاٹ سکتیں۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے
کہ متقاطع سطوح مستویہ
ن ق، لا ما خطِ مستقیم
ا ب پر ایک دوسرے کو
کاٹتی ہیں اور اس کے باہر کسی اور نقطہ پر نہیں کاٹ سکتیں

ثبوت۔ فرض کرو کہ ا اور ب مستوی سطوح ن ق اور لا ما دونوں پر واقع ہیں، تب ا اور ب کو ملانے والا خطِ مستقیم بالتمام دونوں مستوی سطحوں میں واقع ہوگا یعنی مستوی سطحیں ایک دوسرے کو خطِ مستقیم ا ب پر قطع کرینگی نیز چونکہ یہ دونوں سطحیں ا ب میں سے گزرتی ہیں اسلیے ان سطحوں کا کوئی مشترک نقطہ ا ب کے باہر نہیں ہوسکتا ورنہ یہ سطحیں ایک دوسرے پر منطبق ہو جائینگی۔

نوٹ۔ اس سے معلوم ہوگا کہ اگر (۱) تین یا تین سے زیادہ متراکز خطوط مستقیم ایک اور خطِ مستقیم کو قطع کریں تو یہ سب خطوط ہم سطح ہونگے۔
۲۔ اگر تین یا تین سے زیادہ متوازی خط ایک دیئے ہوئے خط مستقیم کو قطع کریں تو یہ سب خطوط ہم سطح ہونگے۔

مستوی سطح کی تکوین

پس ایک مستوی سطح کی تکوین حسب ذیل طریقوں سے ہوسکتی ہے۔

(۱) ایک ایسے خط مستقیم سے، جو اپنے ایک نقطہ کے گرد گردش

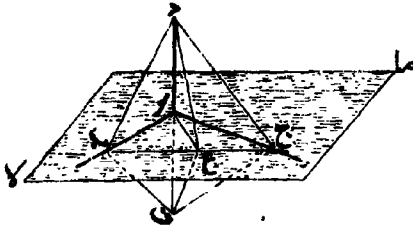
کرے اور ساتھ ہی ایک ثابت خط مستقیم پر بالتواتر پھسلتا جائے

(۲) ایک ایسے خط مستقیم سے جو دو ثابت متقاطع خطوط پر یا دو ثابت متوازی خطوط پر علی التواتر پھسلے۔

(۳) ایک ایسے خط مستقیم سے، جو ہمیشہ اپنے متوازی حرکت کرے اور ایک ثابت خط مستقیم پر پھسلے۔

فضا میں کے مثلث اور ذو اربعتہ الاضلاع ہر مثلث کے اضلاع لازماً ایک ہی سطح مستوی میں واقع ہوتے ہیں (مسئلہ ۱) لیکن ضروری نہیں کہ ایک ذو اربعتہ الاضلاع کے ضلعے بھی ایک ہی سطح مستوی میں واقع ہوں جیسا کہ ایک مستوی ذو اربعتہ الاضلاع کو اس کے ایک قطر پر تہ کرنے سے ظاہر ہے، اس طرح سے جو ذو اربعتہ الاضلاع بنتا ہے اس کو کانا یا معوج ذو اربعتہ الاضلاع کہتے ہیں، اس کے دو متصل اضلاع ایک مستوی سطح میں ہوتے ہیں اور باقی دو دوسری مستوی سطح میں۔

مسئلہ اثباتی ۳ [اقلیدس م ۱۱ ش ۴]

اگر ایک خط مستقیم دو متقاطع خطوط مستقیم میں سے ہر ایک پر عمود ہو اور ان کے نقطۂ تقاطع میں سے گزرے، تو ثابت کرو کہ یہ اس مستوی سطح پر بھی عمود ہوگا جو متقاطع خطوط میں سے گزرتی ہے۔

فرض کرو کہ ا د
ہر دو خطوط مستقیم ا ب
اور ا ج پر عمود ہے
یہ ثابت کرنا مقصود
ہے کہ ا د مستوی سطح
لاما پر بھی عمود ہوگا جو
ا ب اور ا ج میں
سے گزرتی ہے۔

سطح مستوی لاما پر کوئی خط ا ع کھینچو جو ا میں سے گزرے
نیز اسی سطح مستوی میں ایک اور خط ب ج کھینچو جو ا ب، ا ع، ا ج کو بالترتیب ب، ع، ج پر قطع کرے۔

د ا کو ف تک اتنا خارج کرو کہ ا ف، ا د کے مساوی ہو، د ب، د ع، د ج کو ملاؤ، نیز ف ب، ف ع، ف ج کو ملاؤ۔

ثبوت۔ مثلثات ب ا د، اور ب ا ف میں
ب ا، د ف کی تنصیف زاویہ قائمہ پر کرتا ہے۔

∴ ب د = ب ف

اسی طرح سے ج د = ج ف

پس اگر △ ب ف ج کو اس کے قاعدہ ب ج کے گرد اتنا گھمایا جائے کہ راس ف، △ ب د ج کی سطح میں آجائے تو نقطہ ف، د پر منطبق ہوگا کیونکہ مثلثات

ب ف ج اور ب د ج ہر طرح سے مساوی ہیں
∴ ع ف، ع د پر منطبق ہوگا
یعنی ع ف = ع د
اب مثلثات د ا ع اور ف ا ع میں
د ا = ف ا، ع د = ع ف اور ا ع مشترک ہے
اسلئے ∠ د ا ع = ∠ ف ا ع
∴ د ا کسی مستقیم خط ا ع پر (جو اس سے سطح مستوی لاما پر ملتا ہے) عمود ہے۔
یعنی د ا عمود ہے ا ب اور ا ج کی سطح مستوی پر

سوالات اور مشقیں

۱۔ ”خطوط مستقیم متوازی اُس وقت ہوتے ہیں جبکہ وہ ایک دوسرے سے نہ ملیں خواہ انہیں کتنا ہی خارج کیا جائے“ متوازی خطوط کی مندرجہ بالا تعریف میں کیا کمی ہے؟ اپنے جواب کی توضیح مثال کے ذریعہ کرو۔

۲۔ ایک کمرہ کی دیواروں اور کناروں سے مندرجہ ذیل کی مثالیں پیش کرو۔

(۱) متوازی سطحیں
(۲) ایسے خط جو ایک سطح مستوی کے متوازی ہوں
(۳) ایسے خط جو ایک سطح مستوی پر عمود ہوں
(۴) کاٹنے خطوں کے زوج۔

۳ - "دو سطحیں ایک دوسرے کو خطوط پر قطع کرتی ہیں" کیا ضروری ہے کہ یہ خط مستقیم ہوں؟ اگر نہیں تو چند ایسی سطحوں کی مثالیں دو جنکے تقاطع سے منحنی خط پیدا ہوتے ہیں۔

۴ - ایک خط مستقیم کے کسی نقطہ معلومہ میں سے

(۱) دو ابعاد کی فضا میں

(۲) تین ابعاد کی فضا میں

کتنے مستقیم خط کھینچے جا سکتے ہیں جو ایک دئے ہوئے خط مستقیم پر عمود ہوں؟

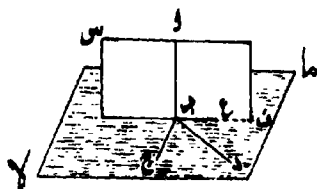
۵ - دو پنسلوں کے ذریعہ اس امر کی توضیح کرو کہ اگر ایک خط کسی سطح مستوی میں کے ایک خط پر عمود ہو تو اس سے لازم نہیں آتا کہ یہ اس مستوی سطح پر بھی عمود ہوگا۔

۶ - ثابت کرو کہ فضا کے کسی نقطہ میں سے تین ایسے خط کھینچے جا سکتے ہیں جن میں سے ہر ایک باقی دو پر عمود ہو۔

نیز ثابت کرو کہ اس صورت میں ہر خط باقی دو کی سطح مستوی پر عمود ہوگا، اس امر کی توضیح کمرہ کی دیواروں اور کناروں سے کرو۔

۷ - ایک دائرہ کے مرکز و میں سے و ا دائرہ کی سطح پر عمود کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ محیط پر کے سب نقطے ا سے متساوی الفصل ہیں۔

مسئلہ اثباتی ۴ [اقلیدس م ۱۱ ش ۵]

ایک خط مستقیم کے کسی نقطہ مفروضہ میں سے اس خط پر عمود کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ یہ سب عمود ایک ہی سطح مستوی میں واقع ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ خطوط ب ج، ب د، ب ع میں سے ہر ایک ا ب پر عمود ہے۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ ب ج، ب د، ب ع ہم سطح ہیں۔

ثبوت۔ فرض کرو کہ ب ج اور ب د میں سے گزرنیوالی مستوی سطح لاما ہے اور ا ب اور ا ع میں سے گزرنیوالی مستوی سطح س ف ہے۔

نیز فرض کرو کہ سطوح س ف اور لاما ایک دوسرے کو خط مستقیم ب ف پر قطع کرتی ہیں

چونکہ ا ب عمود ہے ب ج اور ب د پر

∴ ا ب، ب ف پر بھی عمود ہے کیونکہ ب ف خطوط ب ج، ب د کی سطح مستوی میں واقع ہے اور ا ب سے ب پر ملتا ہے [مسئلہ ۳]

اِس لئے زوایا ا ب ع، ا ب ف دونوں قائمے ہیں اور دونوں ایک ہی سطح مستوی س ف میں واقع ہیں

∴ ب ع، ب ف پر منطبق ہوتا ہے
یعنی ب ج، ب د اور ب ع تینوں ایک ہی مستوی سطح لاما میں واقع ہیں۔
فرع۔ اگر ایک زاویہ قائمہ اپنی ایک ساق کے گرد گھومے، تو اس کی دوسری ساق کی گردش سے ایک مستوی سطح پیدا ہوتی ہے۔
عمل مفروضہ۔ ہم فرض کرسکتے ہیں کہ ایک خط مستقیم کے کسی نقطہ میں سے ایک مستوی سطح کھینچی جاسکتی ہے جو خط مذکور پر عمود ہو۔

تعریفات

۱۔ اگر ایک شاقول بحالت سکون بلا تکلف لٹک رہا ہو تو اسکی ڈوری کی سمت کو انتصابی سمت کہتے ہیں۔
۲۔ جو مستوی سطح انتصابی خط پر عمود ہو وہ افقی سطح کہلاتی ہے۔
۳۔ جو خط افقی سطح پر کھینچا جائے اس کو افقی خط کہتے ہیں۔

سوالات اور مشقیں

۱۔ ایک نقطہ معلومہ میں سے کتنے انتصابی خط کھینچے جاسکتے ہیں اور کتنے افقی؟
۲۔ ایک چٹھی کے کاغذ کو ذرا کھول کر ایک افقی میز پر اس طرح رکھا

گیا ہے کہ اس کے دونوں چھوٹے کنارے میز سے مس کرتے ہیں بتاؤ کہ شکن کیوں انتصابی ہے؟

۳- یہ دیکھنے کے لئے کہ ایک سطح متوازی الافق ہے یا نہیں ثابت کرو کہ سپرٹ لیول کے ساتھ دو مشاہدے کافی ہیں، بشرطیکہ اس کے دونوں محل ایک دوسرے کے متوازی نہ ہوں -

۴- ایک افقی سطح پر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے ' جس کا نصف قطر ۲ء۴ سنٹی میٹر ہے، دائرے کے مرکز و سے ایک انتصابی خط و ن ۶ء۵ سنٹی میٹر لمبا کھینچا گیا ہے ، نقطہ ن کا فاصلہ محیط پر کے کسی نقطہ سے معلوم کرو اور ثابت کرو کہ محیط پر کے سب نقطوں کے لئے یہ فاصلہ وہی رہتا ہے -

۵- دو خطوطِ مستقیم ا ب اور ج د ایک دوسرے کی و پر تنصیف کرتے ہیں اور و ن دونوں پر عمود ہے ، ثابت کرو کہ

(۱) ن ا = ن ب (۲) ن ج = ن د

اور یہ نتیجہ ا ب اور ج د کے زاویۂ تقاطع پر موقوف نہیں۔

اگر ا ب = ۶ء۳″ ، ج د = ۴ء۱″ ' و ن = ۴ء۲″ تو ن ا اور ن ج کے طول معلوم کرو۔

۶- ا ب ج د ایک افقی مربع ہے اور اس کے وسطی نقطہ (یعنی اس کے قطروں کے نقطۂ تقاطع) و پر ایک انتصابی سلاخ و ن ثابت کر دی گئی ہے اور اس کے سرے ن کو ڈوروں کے ذریعہ مربع کے راسوں کے ساتھ ملا دیا گیا ہے -

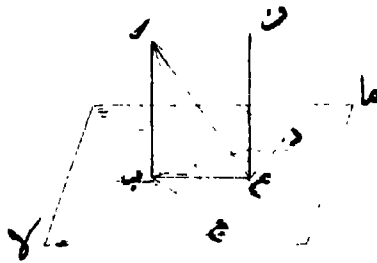
(۱) ثابت کرو کہ ن ا ' ن ب ' ن ج ' ن د سب

مساوی ہیں۔

(۲) اگر مربع کا ہر ایک ضلع ۲۰ سنٹی میٹر ہو اور سلاخ کی بلندی ۴۰ سنٹی میٹر، تو ن ا کا طول قریب ترین ملی میٹر تک معلوم کرو۔

(۳) اگر ن ا' ۸۵ سنٹی میٹر اور سلاخ کی بلندی ۷۵ سنٹی میٹر ہو تو مربع کا ضلع قریب ترین ملی میٹر تک معلوم کرو۔

مسئلہ اثباتی ۵ [اقلیدس م ۱۱ ش ۸]

دو خطوط مستقیم متوازی ہیں اور ان میں سے ایک کسی سطح مستوی پر عمود ہے، ثابت کرو کہ دوسرا خط بھی اسی سطح مستوی پر عمود ہوگا۔

فرض کرو کہ ا ب اور ف ع دو متوازی مستقیم خط ہیں جو سطح مستوی لاما کو ب اور ع پر کاٹتے ہیں، نیز فرض کرو کہ ا ب سطح مستوی پر عمود ہے۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ ف ع بھی سطح مستوی لاما پر عمود ہوگا۔ ا ع اور ب ع کو ملاؤ اور سطح مستوی لاما میں خط

مستقیم ج ع د کھینچو جو ع میں سے گزرے اور ب ع پر عمود ہو، نیز ع ج اور ع د کو مساوی بناؤ۔

ب ج، ب د کو نیز اج، اد کو ملاؤ

ثبوت۔ چونکہ ع ب، ج د کی زاویہ قائمہ پر تنصیف کرتا ہے

∴ ب ج = ب د

اور مثلثات اب ج اور اب د میں

چونکہ ب ج = ب د، اب مشترک ہے

اور ∠ اب ج = ∠ اب د

کیونکہ اب عمود ہے ب ج اور ب د کی سطح مستوی پر

∴ اج = اد

نیز △ت ج ع ا اور د ع ا میں

چونکہ ج ع = د ع، ع ا مشترک ہے اور اج = اد

∴ ∠ ج ع ا = ∠ د ع ا

یعنی ج ع، ع ا پر عمود ہے

لیکن بموجب عمل ج ع، ع ب سے زاویہ قائمہ بناتا ہے

∴ ج ع عمود ہے ع ا اور ع ب کی سطح مستوی پر

اور ع ف بھی اسی سطح مستوی میں واقع ہے کیونکہ ع ا، ع ب دونوں متوازیات اب اور ف ع کی سطح مستوی میں واقع ہیں۔

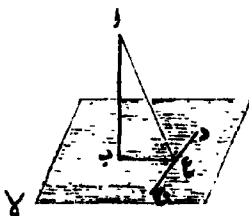
∴ ج ع بھی ع ف پر عمود ہے

نیز چونکہ اب اور ف ع متوازی ہیں اور مفروضات کی رو سے

∠ ا ب ع قائمہ ہے

∴ ∠ ف ع ب بھی قائمہ ہے

پس ف ع خطوط ع ب اور ع ج پر عمود ہونے کی وجہ سے
مستوی لاما پر بھی عمود ہے جس میں یہ دونوں واقع ہیں۔
برعکس اس کے اگر ا ب اور ف ع دونوں سطح مستوی لاما
پر عمود ہوں تو وہ ایک دوسرے کے متوازی ہونگے۔
بموجب سابق اوپر کے عمل سے ثابت کرو کہ ج ع عمود ہے
ع ا اور ع ب کی سطح مستوی پر
اب مفروضات سے واضح ہے کہ ج ع، ع ف پر عمود ہے
∴ ع ف خطوط ع ا اور ع ب کی سطح میں واقع ہے۔
لیکن چونکہ ا ب بھی ع ا اور ع ب کی سطح مستوی میں واقع ہے
∴ ا ب اور ف ع ہم سطح ہیں۔
اور چونکہ مفروض کی رو سے زاویے ا ب ع اور ف ع ب قائمے ہیں
اسلئے ا ب متوازی ہے ف ع کے، اور یہی ثابت کرنا تھا۔

فرع۔ اگر ا ب سطح مستوی لاما پر عمود ہو اور اس کے پائین ب سے
سطح پر کے کسی خط ج د پر عمود ب ع
کھینچا جائے تو ا اور ع کو ملانیوالا خط
ج د پر عمود ہوگا۔ ع ج اور ع د
کو ایک دوسرے کے مساوی بناؤ۔
ب ج اور ب د کو نیز
ا ج اور ا د کو ملاؤ

ثبوت قریب قریب وہی ہے جو اوپر دیا گیا۔
اس مشہور نتیجہ کو "تین عمودوں کا مسئلہ" کہتے ہیں۔

مسئلہ اثباتی ۶

کسی ایسے نقطہ سے جو ایک سطح مستوی پر واقع ہو یا اس کے باہر، صرف ایک ہی مستقیم خط کھینچا جا سکتا ہے جو سطح مستوی پر عمود ہو۔

(۱) فرض کرو کہ نقطہ مفروضہ ا سطح مستوی لاما پر واقع ہے سطح مستوی میں کوئی خط ب ج لو جو ا میں سے گزرتا ہو فرض کرو کہ ایک خط ا ن، ب ج کے ساتھ زاویہ قائمہ بناتا ہے اور اس کے گرد گردش کرتا ہے، تب ا ن ایک ایسی سطح مرتسم کریگا جو ب ج پر عمود ہوگی، فرض کرو کہ یہ سطح مستوی لاما کو خط مستقیم د ا ع پر قطع کرتی ہے۔

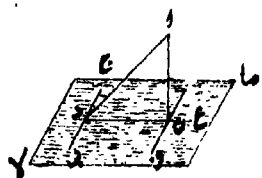
اب جبکہ ا ن گردش کرکے ا د سے ا ع کے مقام پر آتا ہے تو اثنائے حرکت میں لازماً یہ ایک ایسے محل میں سے گزرتا ہے جس میں یہ د ع پر عمود ہوتا ہے، یعنی ب ج اور د ع دونوں پر عمود ہوتا ہے، گویا سطح مستوی لاما پر عمود ہوتا ہے

(۲) فرض کرو کہ نقطۂ مفروضہ ا سطح مستوی لاما کے باہر واقع ہے۔

سطح مستوی میں کوئی خط ب ج کھینچو اور ا سے ب ج پر عمود ا د نکالو۔

سطح مستوی لاما میں ب ج پر عمود د ع کھینچو۔

فرض کرو کہ ا ن عمود ہے نقطہ ا سے د ع پر۔

تب ا ن سطح مستوی لاما پر عمود ہوگا۔

ثبوت۔ نقطہ ن میں سے ن ف، ب ج کے متوازی کھینچو۔

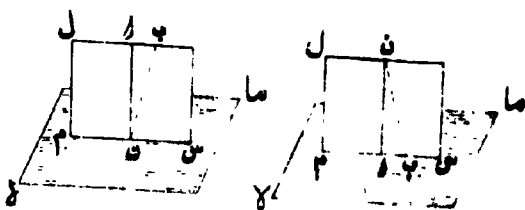
اب چونکہ ب ج دونوں خطوط د ا اور د ع پر عمود ہے اسلیئے یہ سطح مستوی ا د ع پر بھی عمود ہے

لہذا ف ن بھی سطح مستوی ا د ع پر عمود ہے [مسئلہ ۵]

∴ ∠ ا ن ف قائمہ ہے

یعنی ا ن عمود ہے ن ف اور د ع دونوں پر

یعنی ا ن سطح مستوی لاما پر عمود ہے

(۳) کسی نقطہ ن سے سطح مستوی لاما پر ایک اور صرف ایک ہی عمود کھینچ سکتا ہے خواہ نقطہ ن سطح مستوی پر واقع ہو یا اس کے باہر۔

اگر دو عمود کھینچنا ممکن ہو تو فرض کرو کہ نقطہ ن سے سطح مستوی لاما پر دو عمود ن ا، ن ب کھینچے گئے ہیں، نیز فرض کرو کہ وہ سطح مستوی جو ن ا، ن ب میں سے گزرتی ہے سطح مستوی لاما کو خط مستقیم م س پر قطع کرتی ہے
تب ن ا، ن ب دونوں ایک ہی سطح میں م س پر عمود ہیں جو صریحاً ناممکن ہے۔

مشقیں

۱۔ ایک سطح مستوی کے کسی نقطہ پر ایک سیدھی سلاخ کو عمود وار کھڑا کرنا مقصود ہے، بتاؤ کہ یہ عمل دو گنیوں کی مدد سے کس طرح ہو سکتا ہے

۲۔ ایک ایسے مستقیم خط کا مقام معلوم کرنا مطلوب ہے جو کسی نقطہ بیرونی سے سطح مستوی لاما پر عمود ہو، بتاؤ کہ اس غرض کے لئے ایک سیدھی سلاخ اور گنیے کو عمل مسئلہ ۶ شکل ۲ کے مطابق کس طرح استعمال کر سکتے ہیں۔

۳۔ کسی مجسم کی ایک مستوی سطح پر ایک خط مستقیم ب ج کھینچا گیا ہے

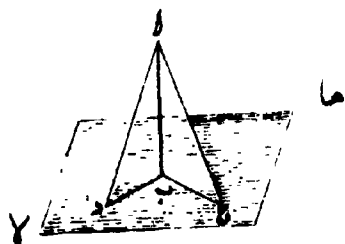
اور ایک نقطہ ا سطح مستوی کے باہر واقع ہے [دیکھو شکل ۲ مسئلہ ۹] ایک ایسے مستقیم خط کا مقام دریافت کرنا مقصود ہے جو ا میں سے گزرے اور ب ج پر عمود ہو، بتاؤ کہ ایسا کرنے کا معمولی طریقہ [اسکول جومیٹری مسئلہ عملی ۳] کیوں یہاں کارآمد نہیں ہوتا۔

پٹری اور پرکار کی مدد سے کوئی اور مناسب عمل دریافت کرو جس سے مطلوبہ عمود ا د کا پایہ د معلوم ہو سکے اور اس کی بنا پر بتاؤ کہ کس طرح نقطہ ا سے سطح مستوی پر عمود کھینچ سکتا ہے۔

[علاوہ اس کے ایک نقطۂ بیرونی سے سطح مستوی پر عمود کھینچنے کے لئے دیکھو اگلے مسئلہ کی مشق ۳]

مسئلہ اثباتی ۷

(۱) اُن سب خطوط میں سے جو کسی نقطۂ بیرونی سے ایک سطح مستوی تک کھینچے جائیں عمود سب سے چھوٹا ہوتا ہے۔

(۲) نقطہ مفروضہ میں سے گزرنے والے مائل خطوط میں سے وہ سب خط آپس میں مساوی ہونگے جن کے پائے عمود کے پایہ سے مساوی فاصلوں پر ہوں۔

(۱) فرض کرو کہ کسی بیرونی نقطہ ا سے سطح مستوی لاما
پر اب عمود اور اج کوئی خط مائل کھینچا گیا ہے
یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ اب چھوٹا ہے اج سے،

ب ج کو ملاؤ

ثبوت ۔ چونکہ اب سطح مستوی لاما پر عمود ہے اس لئے یہ
ب ج پر بھی عمود ہے کیونکہ خط ب ج سطح مستوی لاما پر
واقع ہے اور اب سے ب پر ملتا ہے ۔

پس مثلث ا ب ج میں

$\angle$ اج ب چھوٹا ہے $\angle$ ا ب ج سے

∴ اب چھوٹا ہے اج سے

(۲) فرض کرو کہ خطوط مائل اج اور اد سطح مستوی
لاما کو ج اور د پر قطع کرتے ہیں اور نقاط ج اور د کے
فاصلے عمود اب کے پایہ ب سے مساوی ہیں۔

یعنی ب د = ب ج

یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ اج = اد

ثبوت ۔ چونکہ اب سطح مستوی لاما پر عمود ہے اس لئے
یہ اس سطح میں کے خطوط ب ج، ب د دونوں پر عمود۔
جو اس سے نقطہ ب پر ملتے ہیں ۔

پس مثلثات ا ب ج، ا ب د ہر طرح سے ایک دوسرے
کے مساوی ہیں۔

کیونکہ اب دونوں میں مشترک ہے، ب ج = ب د

∠ اب ج = ∠ اب د

∴ اج = اد

مشقیں

۱۔ کسی نقطۂ بیرونی سے ایک سطح مستوی پر مساوی مائلات کھینچے گئے ہیں
انکے پایوں کا طریق دریافت کرو

۲۔ مثلث ا ب ج کے باہر ایک نقطہ ن ہے جس کے فاصلے
راسوں سے مساوی ہیں، نقطہ ن سے مثلث کی سطح پر عمود نکالا گیا ہے جو
اس کو س پر قطع کرتا ہے، ثابت کرو کہ س مثلث کے بیرونی دائرہ
کا مرکز ہے۔

اگر مثلث ا ب ج کا زاویہ ج قائمہ ہو اور ضلع اَ = ۸ء۴″،
بَ = ۶ء۳″ اور س ن = ۰ء۴″ تو ن ا کا طول دریافت کرو۔

۳۔ پٹری، پرکار اور ایک سیدھی سلاخ کی مدد سے ایک سطح مستوی
پر کسی نقطہ بیرونی سے عمود نکالنے کا عملی طریقہ دریافت کرو، سلاخ کی
لمبائی مطلوبہ عمود سے زیادہ ہے۔

۴۔ تین مستقیم خط ایک نقطہ پر ملتے ہیں مگر ہم سطح نہیں، ایک
اور مستقیم خط کھینچنے کا ہندسی عمل دریافت کرو جو ان تینوں خطوط
سے مساوی زاویے بنائے۔

۵۔ ایک خط مستقیم ا ب سطح مستوی لاما میں واقع ہے اور
کسی بیرونی نقطہ ن سے سطح مستوی پر عمود ن ق نکالا گیا ہے۔
(۱) اگر ق ر، ا ب پر عمود ہو تو ثابت کرو کہ ن ر بھی

اب پر عمود ہوگا۔

(۲) اگر ن ر، اب پر عمود ہو تو ثابت کرو کہ ق ر بھی اب پر عمود ہوگا۔

۶۔ ایک مربع اب ج د کا ضلع ۰٫۹۶ میٹر ہے، اس کے وسطی نقطہ ق پر ایک سلاخ ق ن (طول = ۱٫۴۰ میٹر) ثابت کر دی گئی ہے جو مربع کی سطح پر عمود ہے، اگر ضلع ب ج کا وسطی نقطہ ر ہو تو جم ن ر ق کی قیمت اعشاریہ کے تیسرے مقام تک محسوب کرو۔

۷۔ دو مستوی سطحوں کا خطِ تقاطع اب ہے، اس پر کے کسی نقطہ ن سے مستوی سطحوں میں خطوط ن ق، ن ر کھینچے گئے ہیں جو دونوں اب پر عمود ہیں، ثابت کرو کہ اگر ن ق پر کے کسی نقطہ سے اُس مستوی سطح پر عمود نکالا جائے جس میں ن ق واقع ہے تو یہ عمود ن ق ن ر کی سطح مستوی میں واقع ہوگا۔

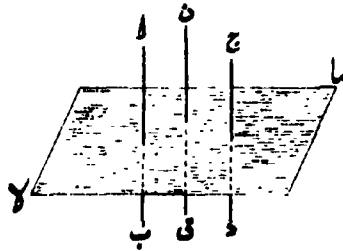
۸۔ ثابت کرو کہ

(۱) فضا میں کے وہ سب نقطے جو دو نقاطِ مفروضہ سے متساوی الفصل ہوں ایک مستوی سطح پر واقع ہوتے ہیں۔

(۲) فضا میں کے وہ سب نقطے جو تین غیر سامت نقطوں سے متساوی الفصل ہوں ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں۔

(۳) چار نقطے ایسے ہیں جو ایک ہی سطح مستوی پر واقع نہیں ہوتے، ثابت کرو کہ ایسا نقطہ صرف ایک ہی ہو سکتا ہے جو ان چاروں سے متساوی الفصل ہو (یہ نقطہ دو مستقیم خطوں کا نقطۂ تقاطع ہوگا)

مسئلہ اثباتی ۸ [اقلیدس م ۱۱ ش ۹]

جو خطوطِ مستقیم ایک مفروضہ خط مستقیم کے متوازی ہوں وہ ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ اب اور ج د دونوں خط مستقیم ن ق کے متوازی ہیں۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ اب اور ج د بھی ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔

ثبوت ۔ فرض کرو کہ لاما کوئی سطح مستوی ہے جو ن ق پر عمود ہے۔

اب چونکہ اب، ن ق کے متوازی ہے
اسلئے اب بھی سطح مستوی لاما پر عمود ہے [مسئلہ ۵]
اور چونکہ ج د، ن ق کے متوازی ہے
اسلئے ج د بھی سطح مستوی لاما پر عمود ہے [مسئلہ ۵]
اب چونکہ اب اور ج د دونوں سطح مستوی لاما پر

عمود ہیں اس لئے یہ ایک دوسرے کے متوازی
ہیں۔ [مسئلہ ۵ کا عکس]

نوٹ۔ اس مسئلہ کا ثبوت اُس صورت میں جبکہ اب، ج د، ن ق ایک ہی سطح مستوی میں واقع ہوں پہلے دیا جا چکا ہے۔
(دیکھو: سکول جومیٹری مسئلہ اثباتی ۱۵)

مشقیں

۱۔ تین مستقیم خط اب، ج د، غ ف ایک دوسرے کے مساوی اور متوازی ہیں لیکن ایک سطح مستوی میں واقع نہیں ہیں ثابت کرو کہ مثلث اج غ اور ب د ف ایک دوسرے کے ہر طرح سے مساوی ہیں۔

۲۔ اگر ایک معوج کثیر الاضلاع کے متصل اضلاع کے وسطی نقطوں کو ملا دیا جائے تو ثابت کرو کہ جو شکل اس طرح سے بنے گی وہ متوازی الاضلاع ہوگی۔

۳۔ اگر ایک مثلث اپنے قاعدہ کے گرد گردش کرے تو ثابت کرو کہ اس کا راس ایک دائرہ مرتسم کریگا۔

۴۔ افقی سطح پر ایک منتظم مسدس بنایا گیا ہے اور اس کے وسطی نقطہ و سے اس کی سطح پر و ن عمود کھینچا گیا ہے جس کا طول ۹،۶ سنتی میتر ہے، ضلع اب کی تنصیف لا پر کی گئی ہے،
اگر اب = ۰،۴ سمر تو ن ا، و لا، ن لا، جم و ان جم و لا ن کی قیمتیں دریافت کرو اور ثابت کرو کہ اب، ن لا

پر عمود ہے۔

مسئلہ اثباتی ۹ [اقلیدس م ۱۱ ش ۱۰]

اگر دو متقاطع خطوط مستقیم دو اور متقاطع خطوط کے بالترتیب متوازی ہوں اور دوسرا زوج پہلے زوج کی سطح مستوی میں واقع نہ ہو تو ثابت کرو کہ پہلے زوج کا درمیانی زاویہ دوسرے زوج کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہے۔

فرض کرو کہ خطوط اب اور ب ج بالترتیب خطوط د ع اور ع ف کے متوازی ہیں اور دوسرا زوج پہلے زوج کی سطح میں واقع نہیں ہے۔

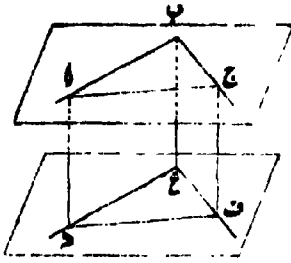
یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ

$\angle$ ا ب ج = $\angle$ د ع ف

ب ا کو ع د کے اور ب ج کو ع ف کے مساوی بناؤ۔ ا د، ب ع، ج ف، ا ج، د ف کو ملاؤ۔

ثبوت۔ چونکہ ب ا، ع د کے مساوی اور متوازی ہے
∴ ا د، ب ع کے مساوی اور متوازی ہے

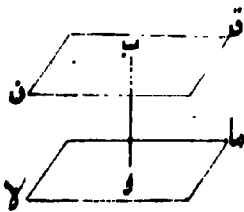
اسی طرح سے ج ف، ب ع کے مساوی اور متوازی ہے

اب چونکہ ا د اور ج ف دونوں ب ع کے مساوی اور متوازی ہیں۔ اسلئے یہ دونوں (ا د اور ج ف) ایک

[مسئلہ ۸] دوسرے کے مساوی اور متوازی ہیں۔
لہٰذا اج مساوی اور متوازی ہُوا د ف کے،
تب مثلثات ا ب ج اور د ع ف میں
چونکہ ا ب، ب ج، اج بالترتیب مساوی ہیں دع، ع ف، د ف کے،
∴ ∠ ا ب ج = ∠ د ع ف
اور یہی ثابت کرنا تھا۔

مسئلہ اثباتی ۱۰ [اقلیدس م ۱۱ ش ۱۴]

جن مستوی سطحوں پر ایک ہی خط مستقیم عمود ہو وہ ایک دوسرے کے متوازی ہوتی ہیں۔

فرض کرو کہ خط مستقیم ا ب سطوح مستوی لاما، ن ق پر عمود ہے۔
یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ مستوی سطحیں لاما اور ن ق ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔

ثبوت۔ چونکہ ا ب سطح مستوی لاما پر عمود ہے اسلئے یہ اُس خط پر بھی عمود ہوگا جو ا کو سطح لاما پر کے کسی نقطہ

سے ملاتا ہے۔

اسی طرح سے خط ا ب اُس خط پر بھی عمود ہوگا جو نقطہ ب کو سطح ن ق پر کے کسی نقطہ سے ملاتا ہے

لہٰذا اگر سطوح لاما اور ن ق میں کوئی نقطہ م مشترک ہو تو ہم اس طرح اس نقطہ کو ا اور ب کے ساتھ ملانے سے خط مستقیم ا ب پر ایک ہی نقطہ م سے دو عمود م ا اور م ب کھینچ سکتے ہیں جو صریحاً ناممکن ہے، پس ثابت ہوا کہ سطوح لاما اور ن ق میں کوئی نقطہ مشترک نہیں ہو سکتا یعنی یہ سطحیں ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔

مشقیں

۱۔ ا ب اور ج د دونوں ایک سطح مستوی پر عاد ہیں اور اس کو ب اور د پر قطع کرتے ہیں، اگر ا ب اور ج د کے طول برابر ہوں اور یہ دونوں سطح مستوی کے ایک ہی جانب واقع ہوں تو ثابت کرو کہ ا ب د ج ایک مستطیل ہے۔

۲۔ گزشتہ مشق کو استعمال کرنے سے ایک ایسے نقطہ کا طریق دریافت کرو جس کا فاصلہ ایک مفروضہ سطح مستوی سے ہمیشہ وہی رہے

۳۔ ایک ایسے نقطہ کا طریق دریافت کرو جس کا فاصلہ دو نقاطِ مفروضہ سے ہمیشہ وہی رہے

مسئلۂ اثباتی ۱۱ [اقلیدس م ۱۱ ش ۱۶]

ایک مستوی سطح دو متوازی مستوی سطحوں کو قطع کرتی ہے،

ثابت کرو کہ خطوطِ تقاطع ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔

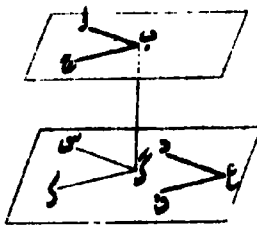
فرض کرو کہ سطح مستوی لاما سطوح متوازی اب اور ج د کو خطوط مستقیم ع ف اور گ س پر قطع کرتی ہے۔
یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ ع ف اور گ س ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔
ثبوت۔ خطوط ع ف اور گ س ایک دوسرے سے مل نہیں سکتے کیونکہ یہ بالترتیب مستوی سطوح اب اور ج د میں واقع ہیں اور ان سطحوں میں کوئی نقطہ مشترک نہیں۔
نیز ع ف اور گ س دونوں ایک مستوی سطح لاما میں واقع ہیں۔
اس لئے ع ف اور گ س متوازی ہیں۔

مشقیں

ا۔ ایک نقطۂ مفروضہ میں سے صرف ایک مستوی سطح کھینچ سکتی ہے

ایک مفروضہ مستوی سطح کے متوازی ہو۔
۲۔ اگر ایک خط مستقیم دو متوازی مستویات میں سے کسی ایک پر عماد ہو تو یہ دوسری سطح پر بھی عماد ہوگا۔
۳۔ ثابت کرو کہ جو مستوی سطحیں ایک مفروضہ مستوی سطح کے متوازی ہوں وہ ایک دوسرے کے متوازی ہوتی ہیں۔
۴۔ ثابت کرو کہ متوازی مستقیم خطوں کے جو حصے متوازی سطحوں کے درمیان واقع ہوتے ہیں وہ ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔
۵۔ متوازی سطحوں کے دو زوج معلوم ہیں، بتاؤ کہ ان کے خطوطِ تقاطع کتنے ہونگے؟ ثابت کرو کہ یہ سب خط ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔

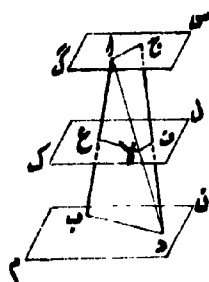
مسئلہ اثباتی ۱۲ [اقلیدس م ۱۱ ش ۱۵]

اگر دو متقاطع مستقیم خط متوازی ہوں بالترتیب دو اور متقاطع مستقیم خطوں کے لیکن ان کی سطح میں واقع نہ ہوں تو پہلے زوج کی سطح مستوی دوسرے زوج کی سطح مستوی کے متوازی ہوگی۔

فرض کرو کہ خطوط

مستقیم اب، ب ج متوازی ہیں بالترتیب دع، ع ف
کے جو اب، ب ج کی سطح مستوی میں واقع نہیں ہیں۔
یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ اب، ب ج کی سطح
مستوی دع، ع ف کی سطح مستوی کے متوازی ہے۔
نقطہ ب سے دع، ع ف کی سطح مستوی پر عمود ب گ
نکالو جو اس سے گ پر ملے۔
گ س، گ ک بالترتیب ع د اور ع ف کے متوازی
کھینچو۔
ثبوت۔ چونکہ ب گ عمود ہے دع، ع ف کی سطح
مستوی پر
∴ زاوئے ب گ س اور ب گ ک قائمے ہیں۔
اب مفروضات کی رو سے ب ا متوازی ہے ع د کے
اور عمل کی رو سے گ س متوازی ہے ع د کے۔
∴ ب ا متوازی ہے گ س کے [مسئلہ ۸]
اور چونکہ ∠ ب گ س قائمہ ہے
∴ ∠ ا ب گ قائمہ ہے
اسی طرح سے ∠ ج ب گ قائمہ ہے
∴ ب گ عمود ہے اب، ب ج کی سطح مستوی
پر اور عمل کی رو سے ب گ عمود ہے ع د، ع ف کی
سطح مستوی پر۔
اسلئے اب، ب ج کی سطح مستوی متوازی ہے

ع د، ع ف کی سطح مستوی کے، اور یہی ثابت کرنا تھا۔ [مسئلہ ۱۰]

مسئلہ اثباتی ۱۳ [اقلیدس م ۱۱ ش ۱۷]

اگر متوازی سطوح مستویہ مستقیم خطوں کو قطع کریں تو وہ سب خطوط کو ایک ہی نسبت سے قطع کرینگی

فرض کرو کہ تین متوازی سطوح مستویہ گ س، ک ل، م ن خطوط مستقیم ا ب، ج د کو نقاط ا، ع، ب اور ج، ف، د پر قطع کرتی ہیں۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ نسبت اع : ع ب = ج ف : ف د،

ا ج، ب د، ا د کو ملاؤ اور فرض کرو کہ خط ا د سطح مستوی ک ل سے نقطہ لا پر ملتا ہے، ع لا، لا ف کو ملاؤ۔

ثبوت۔ چونکہ دو متوازی سطوح مستویہ ک ل، م ن کو سطح مستوی ا ب د قطع کرتی ہے، اس لئے تقاطع کے خطوط ع لا، ب د ایک دوسرے کے متوازی ہیں [مسئلہ ۱۱]

نیز چونکہ دو متوازی سطوح مستویہ گ س، ک ل کو سطح مستوی د ا ج قطع کرتی ہے اسلئے تقاطع کے خطوط لا ف، ا ج باہم متوازی ہیں۔

اب چونکہ ع لا متوازی ہے ب د کے، جو ایک ضلع ہے مثلث ا ب د کا

∴ ا ع : ع ب = ا لا : لا د

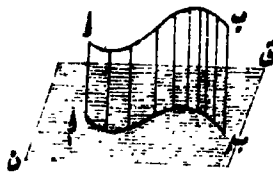
نیز چونکہ لا ف متوازی ہے ا ج کے، جو مثلث د ا ج کا ایک ضلع ہے

∴ ا لا : لا د = ج ف : ف د

اس لئے ا ع : ع ب = ج ف : ف د

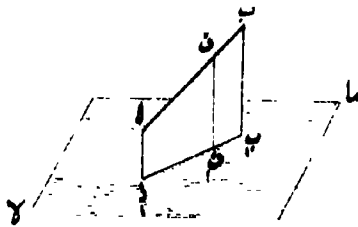
۱۔ دو متوازی سطوح مستوی دو متقاطع سطوح مستوی کو قطع کرتی ہیں، اس طرح سے پہلے زوج کی ہر ایک سطح اور دوسرے زوج کی دونوں سطحوں کے تقاطع سے خطوط مستقیم کے دو زوج حاصل ہوتے ہیں، ثابت کرو کہ پہلے زوج کے خطوط کا درمیانی زاویہ دوسرے زوج کے خطوط کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہے، اس کی مستثنیٰ صورت بیان کرو۔

۲۔ بتاؤ کہ کسی مفروضہ خطِ مستقیم پر ایک ایسے نقطہ کا تعین کسطرح ہوسکتا ہے جس کے فاصلے دو ثابت نقطوں سے مساوی ہوں، یہ کس صورت میں ناممکن ہوگا۔

تعریف ۔ اگر کسی خط مفروضہ کے ہر ایک نقطہ سے ایک سطح مستوی پر عمود نکالے جائیں تو ان عمودوں کے پایوں کا جو طریق ہو اس کو خط مذکور کا ظل سطح مستوی پر کہتے ہیں

ہیں۔

ساتھ کی شکل میں خط ا ب
کا ظل سطح ن ق پر اَ بَ
ہے۔

مسئلہ اثباتی ۱۴

کسی سطح مستوی پر ایک خط مستقیم کا ظل بھی خطِ مستقیم ہوتا ہے

فرض کرو کہ مفروضہ خط مستقیم ا ب ہے اور سطح مستوی لاما ہے۔

نیز فرض کرو کہ ا ب پر کے کسی نقطہ ن سے سطح مستوی لاما پر عمود ن نَ کھینچا گیا ہے جو اس سے نَ پر ملتا ہے۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ نَ کا طریق خط مستقیم ہے

ا اور ب سے سطح مستوی لاما پر عمود ا اَ، ب بَ کھینچو

ثبوت۔ خطوط ا اَ، ب بَ، ن نَ سب ایک دوسرے کے متوازی ہیں کیونکہ یہ سب سطح مستوی لاما پر عمود ہیں۔ [مسئلہ ۵ کا عکس]

نیز یہ سب متوازی خط ایک ہی سطح مستوی میں واقع ہیں کیونکہ یہ سب خط مستقیم ا ب کو قطع کرتے ہیں۔

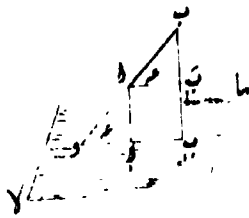
اس لئے نقطہ $ن_1$ سطوح مستویہ $اب_1$ اور لاما کے خط تقاطع
پر واقع ہے۔

یعنی $ن_1$ خط مستقیم $اب_1$ پر واقع ہے

لیکن چونکہ $ن_1$، اب کے ظل پر کا کوئی نقطہ ہے

∴ اب کا ظل خط مستقیم $اب_1$ ہے

فرع ۱۔ ایک خط مستقیم اب اور ایک سطح مستوی لاما
کے درمیانی زاویہ کا ناپ وہ زاویہ ہے جو اب
اور سطح مستوی پر اس کے ظل کے درمیان بنتا ہے کیونکہ ایک
خط مستقیم اور اس کا ظل ہم سطح ہوتے ہیں۔

مثلاً اگر اب اور $اب_1$
(محدود بہ شرط ضرورت) ایک
دوسرے سے و پر ملیں تو
اب اور سطح مستوی لاما کے
درمیانی زاویہ کا ناپ
∠ ب و $ب_1$ ہوگا۔

فرع ۲۔ سطح مستوی لاما پر جو اب کا ظل ہے اس کے
طول کو اب اور سطح لاما کے درمیانی زاویہ اور اب
کی رقوم میں معلوم کرو۔

فرض کرو کہ خط مستقیم اب سطح مستوی لاما کے ساتھ
زاویہ ھ بناتا ہے (ملاحظہ ہو شکل بالا)

اتَ کو $اب_1$ کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ ∠ب

ب ب۱ کو ت ب۱ پر قطع کرتا ہے۔

تب ∠ ب ا ب۱ = متناظر ∠ ب و ب۱ = ع

اب مثلث قائم الزاویہ ب ا ب۱ سے $\frac{\text{ا ب۱}}{\text{ا ب}}$ = جم ع

لہذا ا ب۱ = ا ب۱ = ا ب جم ع

نوٹ ۔ جیسے ع صفر سے °۹۰ تک بڑھتا ہے جم ع کی قیمت کم ہوتی جاتی ہے، اس سے ظاہر ہے کہ جیسے ا ب کا میلان سطح مستوی کے ساتھ بڑھتا جائے گا اس کا ظل ا۱ ب۱ کم ہوتا جائیگا۔

مشقیں

۱ ۔ اگر ایک خط مستقیم ایک سطح مستوی کے متوازی ہو تو ثابت کرو کہ یہ اس سطح مستوی پر اپنے ظل کے بھی متوازی ہوگا۔

۲ ۔ ا ب کے طول کا مقابلہ سطح لاما پر اس کے ظل کے ساتھ کرو جبکہ ا ب

(۱) متوازی ہو سطح مستوی کے

(۲) عمود ہو سطح مستوی پر

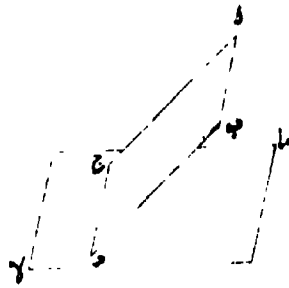
(۳) سطح مستوی کے ساتھ °۶۰ کا زاویہ بنائے

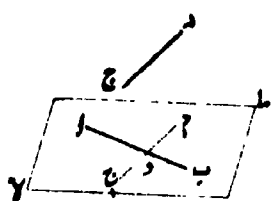
۳ ۔ ثابت کرو کہ اگر کسی بیرونی نقطہ سے سطح مستوی تک مساوی خطوط مائل کھینچے جائیں تو ان سب کے ظل بھی مساوی ہوتے ہیں۔

۴ ۔ ثابت کرو کہ سطح مستوی پر متوازی خطوں کے ظل بھی متوازی ہوتے ہیں، کیا اس کی کوئی مستثنیٰ صورت ہے؟

۵۔ ایک سطح مستوی پر دو متوازی خطوط مستوی اب، ج د کے ظل بالترتیب اَ بَ، جَ دَ ہیں، ثابت کرو کہ
اب : ج د = اَبَ : جَ دَ

مسئلہ اثباتی ۱۵

ایک خط مستقیم ایک مستوی کے باہر واقع ہے اور سطح میں کے ایک خط مستقیم کے متوازی ہے، ثابت کرو کہ بیرونی خط سطح مستوی کے متوازی ہے۔

فرض کرو کہ اب متوازی ہے ج د کے، جو سطح مستوی لاما میں واقع ہے۔
یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ اب سطح مستوی لاما کے متوازی ہے
ثبوت۔ فرض کرو کہ متوازی خطوط اب اور ج د کی سطح مستوی اذ ہے، یعنی مستوی سطوح اد، لاما کا خط قاطع ج د ہے۔
تب اگر خط اب جو سطح مستوی اد پر واقع ہے سطح مستوی

لاما سے کہیں ملے تو لازماً یہ (اب) خط مستقیم ج د کے
کسی نقطہ پر ملے گا۔
لیکن حسب مفروض اب، ج د سے کہیں نہیں مل سکتا۔
∴ خط اب سطح مستوی لاما سے بھی کہیں نہیں مل سکتا یا
بالفاظ دیگر یہ اس کے متوازی ہے۔
برعکس اس کے اگر ایک خط مستقیم ایک سطح مستوی کے
متوازی ہو اور اس خط میں سے گذرنیوالی ایک اور مستوی
سطح اول الذکر مستوی کو قطع کرے تو ان سطحوں کا خط تقاطع
مفروضہ خط مستقیم کے متوازی ہوگا۔
شکل بالا میں فرض کرو کہ خط اب سطح مستوی لاما کے
متوازی ہے اور اب میں سے گزرنیوالی سطح مستوی ا د کا
خط تقاطع سطح مستوی لاما کے ساتھ خط مستقیم ج د ہے
یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ ج د، اب کے متوازی ہے
ثبوت۔ چونکہ خط اب مستوی لاما کے متوازی ہے اسلئے
یہ خط ج د سے جو اس سطح مستوی پر واقع ہے کبھی نہیں
مل سکتا۔
علاوہ ازیں اب اور ج د دونوں سطح مستوی ا د میں
واقع ہیں۔
∴ اب متوازی ہے ج د کے
فرع — دو معوج خط معلوم ہیں، ثابت کرو کہ کسی ایک خط میں
سے ایک ایسی سطح مستوی کھینچی جا سکتی ہے جو دوسرے خط

کے متوازی ہو
فرض کرو کہ ا ب
اور ج د دو معوج خط
ہیں یعنی یہ ایسے خط
ہیں جو ایک ہی سطح مستوی
میں واقع نہیں ہوتے

ا ب کے کسی نقطہ و میں سے ج د، ج د کے متوازی کھینچو
تب ا ب اور ج م دونوں مل کر ایک سطح مستوی لا ما کی تعیین
کرتے ہیں اور خط ج د اس سطح کے متوازی ہے کیونکہ یہ ج م کے متوازی
ہے جو اس سطح میں واقع ہے۔

تعریف۔ دو معوج خط معلوم ہیں، ان میں سے ایک پر کے کسی
نقطہ سے دوسرے خط کے متوازی ایک تیسرا خط کھینچا گیا
ہے، ان متقاطع خطوط (پہلے اور تیسرے) کے درمیان جو
زاویہ بنتا ہے وہ معوج خطوں کے درمیانی زاویہ کا ناپ
ہوتا ہے۔

مثلاً شکل بالا میں معوج خطوط ا ب اور ج د کے درمیانی
زاویہ کا ناپ وہ زاویہ ہے جو ا ب، ج م سے بناتا ہے جہاں
ج م خط و ب کے کسی نقطہ و سے ج د کے متوازی کھینچا گیا ہے۔

مشقیں

۱۔ اگر ایک خط مستقیم ا ب کسی سطح مستوی لا ما کے متوازی

ہو تو

(۱) ہر خط مستقیم جو ا ب کے متوازی ہوگا وہ سطح مستوی کے بھی متوازی ہوگا۔

(۲) ہر خط جو سطح مستوی کے متوازی ہوگا وہ ا ب کے بھی متوازی ہوگا۔

ان دو امور میں سے کونسا صحیح ہے اور کونسا غلط ؟

۲ ــ ایک خطِ مستقیم ا ب نقطہ ا کے گرد گردش کرتا ہے اور ہمیشہ سطحِ مستوی لاما کے متوازی رہتا ہے ، بتاؤ کہ ا ب کس سطح کی تکوین کرتا ہے ؟

۳ ــ دو متقاطع مستوی سطحیں بالترتیب دو متوازی خطوط ا ب، ج د میں سے گزرتی ہیں، ثابت کرو کہ متقاطع سطوح کا خطِ تقاطع ا ب، ج د کے متوازی ہے ــ

۴ ــ ایک خطِ مستقیم دو متقاطع مستوی سطحوں میں سے ہر ایک کے متوازی ہے ، ثابت کرو کہ یہ ان سطحوں کے خط تقاطع کے بھی متوازی ہے۔

۵ ــ ثابت کرو کہ ایک نقطۂ مفروضہ ن میں سے ایک ایسی سطح مستوی کھینچی جاسکتی ہے جو ہر دو معوج خطوط ا ب، ج د کے متوازی ہو۔

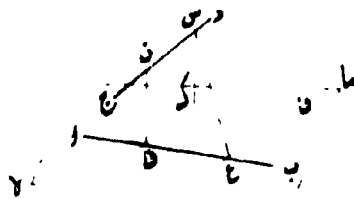
۶ ــ ثابت کرو کہ دو معوج خطوط میں سے دو ایسی مستوی سطحیں گزر سکتی ہیں جو ایک دوسرے کے متوازی ہوں ۔

مسئلہ اثباتی ۱۶

اگر دو خطوط مستقیم نہ ایک دوسرے کو قطع کریں اور نہ متوازی

ہوں تو

(۱) ایک خط مستقیم ایسا ہو سکتا ہے جو ان دونوں پر عمود ہو

(۲) اور یہ مشترک عمود ان دونوں خطوں کے درمیان چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ ہے ۔

فرض کرو کہ ا ب اور ج د دو مفروضہ کا نے خط ہیں

(۱) یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ ایک خط مستقیم ایسا ہو گا جو ا ب اور ج د دونوں پر عمود ہو ۔

ا ب کے کسی نقطہ ع میں سے ع ف، ج د کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ ع ف اور ا ب کی سطح مستوی لاما ہے، نیز فرض کرو کہ ج د کا ظل سطح لاما پر ق ک ہے جو ا ب کو ق پر قطع کرتا ہے اور ن، ج د پر کا وہ نقطہ ہے جس کا ظل ق ہے ۔

تب ن ق خطوط ا ب اور ج د دونوں پر عمود ہو گا ۔

ثبوت ۔ چونکہ ج د، ع ف کے متوازی ہے اس لئے یہ سطح مستوی لاما کے بھی متوازی ہے ۔

لہذا ج د اپنے ظل ق ک کے بھی متوازی ہے [مسئلہ ۱۵]
نیز چونکہ ن ق سطح مستوی لامام پر عمود ہے
اسلئے زاویے ن ق ب اور ن ق ک قائمے ہیں
پس زاویہ ق ن د ایک قائمہ ہے۔
پس ن ق عمود ہے اب اور ج د دونوں پر
(۲) یہ ثابت کرنا ہے کہ ن ق خطوط ج د اور اب کے درمیان چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ ہے۔
ج د کے کسی نقطہ میں سے کوئی خط مستقیم س غ ایسا کھینچو جو اب کو غ پر قطع کرے اور س سے سطح مستوی لامام پر عمود س ک نکالو
تب عمود س ک لازماً خط مائل س ع سے چھوٹا ہوگا [مسئلہ۷]
∴ ن ق بھی جو اس کے مساوی اور متوازی ہے س ع سے چھوٹا ہوگا۔

تعریفات۔ (۱) جب دو مستوی سطحیں ایک دوسرے کو قطع کریں تو خط تقاطع پر ان کے درمیان دوسطحی زاویہ بنتا ہے
(۲) اور اس کا ناپ ان دو خطوط مستقیم کا درمیانی زاویہ ہوتا ہے جن میں سے ہر ایک خطِ تقاطع کے کسی نقطہ سے ہر سطح میں کھینچا گیا ہو اور ہر ایک خطِ تقاطع پر عمود ہو۔
مثلاً دو متقاطع مستوی سطحوں ا د اور ب ج کا خط تقاطع اب ہے اور اب پر کے کسی نقطہ ق سے سطح مستوی ا د میں ق ر، اب پر عمود کھینچا گیا ہے اور ق ن سطح مستوی

ب ج میں ا ب پر
عمود کھینچا گیا ہے
پس ان دو مستوی
سطحوں کے درمیان
جو دوسطحی زاویہ ہے
اس کا ناپ ہے
∠ ن ق ر ہے

ج ق ل ا ن م ص ر ب د

نوٹ ۔(۱) اس تعریف میں ہم نے یہ تسلیم کر لیا ہے کہ نقطہ ق، ا ب پر خواہ کہیں لیا جائے زاویہ ن ق ر کی مقدار میں فرق نہیں آتا اس کی تصدیق مسئلہ ۹ کی رُو سے فوراً ہوسکتی ہے۔

خط تقاطع ا ب پر کے کسی اور نقطہ م سے دونوں سطحوں میں ا ب پر عمود م ل، م ص کھینچو۔

تب صریحاً ل م، م ص بالترتیب متوازی ہیں ن ق، ق ر کے

∴ ∠ ل م ص = ∠ ن ق ر

(۲) چونکہ ا ب، ن ق اور ق ر دونوں پر عمود ہے اسلئے یہ ن ق اور ق ر کی سطح مستوی پر بھی عمود ہوگا۔

پس دو مفروضہ مستوی سطحوں ب ج، ا د کے دوسطحی زاوئے کی تعیین ان دو سطحوں کو کسی ایسی مستوی سطح سے کاٹنے سے ہوسکتی ہے جو ان دونوں سطحوں کے خط تقاطع ا ب پر عمود ہو۔

۴۷ ۔ اگر دو مستوی سطحوں کا دوسطحی زاویہ ایک قائمہ کے

برابر ہو تو یہ سطحیں ایک دوسرے پر عمود کہلاتی ہیں

مسئلہ اثباتی ۱۷ [اقلیدس م ۱۱ ش ۱۸]

اگر ایک خط مستقیم ایک سطح مستوی پر عمود ہو تو ہر ایک مستوی سطح جو اس عمود میں سے گزرے مفروضہ سطح مستوی پر عمود ہوگی۔

فرض کرو کہ خط مستقیم ن ق سطح مستوی لاما پر عمود ہے اور ب ج ایک ایسی سطح مستوی ہے جو عمود ن ق میں سے گزرتی ہے۔
یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ سطح مستوی ب ج سطح مستوی لاما پر عمود ہے
سطوح مفروضہ لاما اور ب ج کے خط تقاطع

پرکوئی نقطہ ق لو اور ق سے سطح لاما میں ا ب پر عمود ق ر کھینچو۔

ثبوت ۔ چونکہ ن ق سطح لاما پر عمود ہے اس لئے یہ خطوط ق ب، ق ر دونوں پر عمود ہے۔

لہذا زاویہ ن ق ر ایک قائمہ ہے، نیز چونکہ دو سطحی زاویہ کا ناپ بھی یہی زاویہ ——— ہے کیونکہ خطوط ن ق، ق ر دونوں خطوط تقاطع ا ب پر عمود ہیں

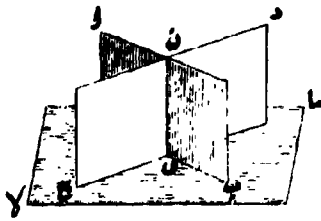
∴ سطح مستوی ب ج عمود ہے سطح مستوی لاما پر۔

فروع۔ برعکس اسکے عمل بالا سے ہی یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

(۱) اگر دو مستوی سطحیں ج ب، لاما ایک دوسرے پر عمود ہوں اور کوئی خط مستقیم ن ق سطح مستوی ب ج میں خط تقاطع ا ب پر عموداً کھینچا جائے تو یہ خط سطح مستوی لاما پر بھی عمود ہوگا۔

(۲) اگر سطح مستوی ب ج سطح مستوی لاما پر عمود ہو اور پہلی سطح کے کسی نقطہ ن سے دوسری سطح پر عمود ن ق کھینچا جائے تو ن ق سطح مستوی ب ج میں واقع ہوگا۔

مسئلہ اثباتی ۱۸ [اقلیدس م ۱۱ ش ۱۹]

اگر دو متقاطع مستوی سطحوں میں سے ہر ایک کسی تیسری سطح مستوی پر عمود ہو تو پہلی دو سطحوں کا خط تقاطع تیسری سطح پر عمود ہوگا۔

فرض کرو کہ سطوح مستوی ا ب اور ج د کا خط تقاطع ن ق ہے اور یہ دونوں سطحیں سطح لاما پر عمود ہیں۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ خط ن ق سطح مستوی لاما پر عمود ہے۔

ثبوت۔ اگر سطوح ا ب اور ج د کے کسی مشترک نقطہ ن سے سطح لاما پر عمود نکالا جائے تو یہ عمود سطوح ا ب اور ج د میں سے ہر ایک میں واقع ہوگا کیونکہ یہ دونوں سطحیں ا ب اور ج د سطح لاما پر عمود ہیں [مسئلہ ۱۷ فرع ۲]

لہٰذا یہ عمود خط تقاطع ن ق پر منطبق ہوگا یا بالفاظ دیگر ن ق سطح لاما پر عمود ہے۔

مشقیں

۱۔ کسی مفروضہ خط مستقیم میں سے ایک ایسی سطح مستوی کھینچی جا سکتی ہے جو ایک مفروضہ سطح مستوی پر عمود ہو

۲۔ ثابت کرو کہ اگر ایک خط مستقیم دو متوازی سطوح مستوی کو قطع کرے تو یہ ان سطحوں کے ساتھ مساوی زاوے بناتا ہے۔

۳۔ اگر ایک سطح مستوی دو اور متوازی سطوح مستویہ کو قطع کرے
تو متناظر دو سطحی زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

۴۔ ایک کمرہ کا فرش ا ب ج د ہے اور اس کی چھت
اَ بَ جَ دَ،

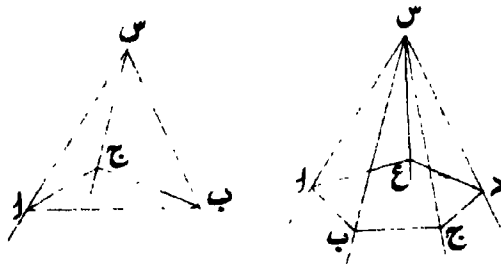
اگر کمرہ کا طول ا ب = ۷٫۵ میتر، عرض ا د = ۶٫۰۰ میتر
اور ارتفاع = ۴٫۵۰ میتر تو

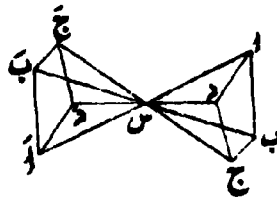
(۱) سطح ا ب جَ دَ اور فرش
(۲) سطح ا بَ جَ د اور فرش

کے درمیان جو دو سطحی زاویے بنتے ہیں ان کی جیوب التمام معلوم کرو۔

۵۔ ایک افقی مربع ا ب ج د کے مرکز کے عین اوپر انتصابی
سمت میں ایک نقطہ ن، ۲ فٹ کے فاصلہ پر واقع ہے، اگر ا ب کا
طول ۱ فٹ ۲ انچ ہو تو مربع کی سطح اور سطح ن ا ب کے درمیان
جو دو سطحی زاویہ بنتا ہے اس کی جیب التمام معلوم کرو۔

مجسّم زاوئے

اگر تین یا زیادہ مستوی سطحوں میں سے ہر ایک بالترتیب اپنے مابعد کی سطح کو اس طرح قطع کرے کہ ان سب کے خطوط تقاطع ایک دوسرے سے ایک ہی نقطہ پر ملیں تو ان سطحوں سے جو زاویہ بنتا ہے اس کو مجسّم زاویہ کہتے ہیں، ان سب خطوطِ تقاطع کے مشترک نقطہ کو راس کہتے ہیں، متصل سطحوں کے خطوطِ تقاطع مجسم زاوئے کے کنارے کہلاتے ہیں، متصل سطحوں کے درمیان جو زاوئے بنتے ہیں اُن کو دو سطحی زاویوں سے موسوم کرتے ہیں اور متصل کناروں کے درمیان جو مستوی زاوئے بنتے ہیں اُن کو رخوں کے زاوئے یا طرفی زاوئے کہتے ہیں۔

مثلاً اشکالِ بالا میں سطوحِ مستوی ا س ب، ب س ج،...... جو ایک دوسرے کو علی التواتر متراکز کناروں س ب، س ج،... پر کاٹتی ہیں راس س پر مجسم زاویہ بناتی ہیں۔ مجسم زاویہ کو (س، ا ب ج د ع ...) سے یا محض حرف س سے تعبیر کرتے ہیں

۲- تین متراکز (یاہم نقطہ) سطوح مستوی سے جو مجسم زاویہ بنتا ہے اس کو سہ سطحی زاویہ کہتے ہیں اور تین سے زیادہ مستوی سطحوں سے جو زاویہ بنتا ہے اس کو کثیر سطحی زاویہ کہتے ہیں اس سہ سطحی زاویہ کے تین طرفی زاویوں اور تین دوسطحی زاویوں کو مجسم زاویہ کے چھ حصے کہتے ہیں۔
اگر دو مجسم زاوئے ایک دوسرے پر عین منطبق ہوسکیں یعنی ایک زاویہ دوسرے پر ٹھیک آجائے تو یہ زاوئے ایک دوسرے کے ہر طرح سے برابر ہونگے، اس صورت میں ایک مجسم زاویہ کے طرفی زاوئے الگ الگ دوسرے مجسم زاویہ کے طرفی زاویوں کے مساوی ہونگے اور ایک مجسم زاویہ کے سب دوسطحی زاوئے الگ الگ دوسرے مجسم زاویہ کے دوسطحی زاویوں کے برابر ہونگے بشرطیکہ مجسم زاویوں کے ان حصوں کو دونوں صورتوں میں ایک ہی ترتیب اور سمت میں لیا جائے۔
نوٹ۔ گزشتہ تعریف میں مجسم زاویوں کے حصوں کو ایک ہی ترتیب میں لینا چاہیئے، اس شرط کی ضرورت اس طرح واضح ہوتی ہے۔ ایک مجسم زاویہ کے کناروں کو راس میں سے دوسری جانب خارج کرو، اس طرح سے جو مجسم زاویہ حاصل ہوتا ہے، اس کا مقابلہ پہلے مجسم زاویہ سے کرو۔

یہاں مجسم زوایا (س، ا ب ج د) اور (س، اَ بَ جَ دَ) کے حصوں کو اگر اسی ترتیب سے لیا جائے جو حروف سے ظاہر ہے تو ایک زاویہ کے سب طرفی زاوئے اور دوسطحی زاوئے الگ الگ دوسرے زاویہ کے سب طرفی زاویوں اور دوسطحی زاویوں کے مساوی ہیں لیکن اگر ایک شخص ان دونوں زاویوں کے اندر سے راُس کی جانب دیکھے تو ایک صورت میں تو یہ ترتیب سمت ساعت کے موافق معلوم ہوگی مگر دوسری صورت میں سمت ساعت کے مخالف دکھائی دیگی۔

پس اگرچہ ان دونوں صورتوں میں مجسم زاویوں کے سب اجزا بالترتیب ایک دوسرے کے مساوی ہیں لیکن باوجود اس کے یہ زاوئے ایک دوسرے پر منطبق نہیں ہو سکتے اس لئے ان کو ہر طرح سے ایک دوسرے کے مساوی نہیں کہا جاسکتا۔

دو مجسم زاوئے جو ایک دوسرے سے حسب تشریح بالا تعلق رکھتے ہیں **متشاکل زاوئے** کہلاتے ہیں۔

نوٹ ۲۔ اگر دوسطحی زاویوں (س، ا ب ج) اور

(س، اَ بَ جَ) میں ایک کے تین طرفی زاوئے ا س ب، ب س ج، ج س ا بالترتیب دوسرے زاوئے کے طرفی زاویوں اَ سَ بَ، بَ سَ جَ، جَ سَ اَ کے برابر ہوں تو پہلے مجسم زاویہ کے دوسطحی زاوئے دوسرے کے دوسطحی زاویوں کے بالترتیب برابر ہونگے۔

س ا اور سَ اَ کے طول باہم مساوی بناؤ

اور سطوح مستویہ ا س ب اور ا س ج میں بالترتیب ا ب اور ا ج، س ا پر عمود کھینچو۔

نیز سطوح مستویہ اَ سَ بَ اور اَ سَ جَ میں بالترتیب اَ بَ اور اَ جَ، سَ اَ پر عمود کھینچو

تب ∠ ب ا ج اور ∠ بَ اَ جَ متناظر دوسطحی زاویں کے ناپ ہیں۔

ب ج اور بَ جَ کو ملاؤ

ثبوت کا خاکہ

مثلثوں کے حسب ذیل زوج باہم مساوی ہیں۔

(۱) △ س ا ب = △ سَ اَ بَ

(۲) △ س ا ج = △ سَ اَ جَ

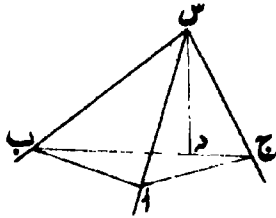
(۳) △ ب س ج = △ بَ سَ جَ

(۴) △ ب ا ج = △ بَ اَ جَ

پس ∠ ب ا ج = ∠ بَ اَ جَ

اسی طرح سے باقی کے دوسطحی زاویوں کو بھی برابر ثابت کیا جا سکتا ہے اور اگر مساوی زاویے ایک ہی ترتیب اور سمت میں واقع ہوں تو دونوں مجسم سہ سطحی زاویے ہر طرح سے ایک دوسرے کے مساوی ہونگے۔

مسئلہ اثباتی ۱۹ [اقلیدس م ۱۱ ش ۲۰]

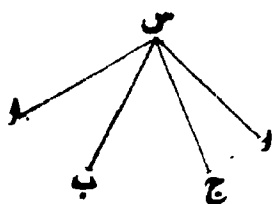
ایک سہ سطحی زاویہ میں دو طرفی زاویوں کا مجموعہ تیسرے زاویئے سے بڑا ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ (س، ا ب ج) ایک سہ سطحی زاویہ ہے جس کے طرفی زاویئے بالترتیب ا س ب، ب س ج، ج س ا ہیں۔

ان زاویوں میں فرض کرو کہ ∠ ب س ج سب سے بڑا ہے، یہ ثابت کرنا کافی ہوگا کہ زوایا ا س ب، اور اَ س ج دونوں ملکر زاویہ ب س ج سے بڑے ہیں۔

سطح مستوی ب س ج میں زاویہ ب س د،

زاویہ ب س ا کے مساوی بناؤ اور س د کو س ا
کے مساوی کاٹو
سطح مستوی ب س ج میں نقطہ د میں سے کوئی
خط مستقیم کھینچو جو س ب، س ج سے بالترتیب ب
اور ج پر ملے، اب، اج کو ملاؤ۔
ثبوت ۔ چونکہ مثلثات ب س ا اور ب س د میں
ب س، س ا بالترتیب مساوی ہیں ب س، س د کے
اور زاویہ ب س ا = ∠ ب س د
∴ ب ا = ب د
اب مثلث ب ا ج میں
حاصل جمع (ب ا + ا ج) بڑا ہے ب ج سے
یعنی بڑا ہے ب د + د ج سے
∴ ا ج بڑا ہے د ج سے
نیز مثلثات ا س ج اور د س ج میں
چونکہ ا س، س ج بالترتیب مساوی ہیں د س،
س ج کے
لیکن ا ج بڑا ہے د ج سے
اس لئے زاویہ ا س ج بڑا ہے زاویہ د س ج سے،
∴ زوایا ا س ب اور ا س ج ملکر بڑے ہیں زوایا
ب س د اور د س ج کے مجموعہ سے
یعنی بڑے ہیں زاویہ ب س ج سے

مسئلہ ۱۹ کا تجربی ثبوت

ایک مجسم زاویہ بنانے کے لئے تین طرفی زاویوں ا س ب،
ب س ج اور ج س ا کو ایک سطح مستوی میں اس طرح کھینچو
کہ سب سے بڑا زاویہ ب س ج
باقی دو زاویوں کے درمیان واقع
ہو، اب فرض کرو کہ یہ شکل کاغذ
پر سے کاٹ لی گئی ہے۔ اور
س ا ، س اَ کو ایک دوسرے
پر منطبق کرنے کی غرض سے اس کو
ب س اور س ج پر شکن دیکر تہ کیا گیا ہے۔

اب (۱) اگر ∠ ب س ا + ∠ ج س اَ ملکر چھوٹے
ہوں ∠ ب س ج سے، تو س ا اور س اَ ایک دوسرے
پر نہیں لائے جا سکتے اور اس وجہ سے مجسم زاویہ نہیں بن سکتا

(۲) اگر ∠ ب س ا + ∠ ج س اَ ملکر برابر ہوں
∠ ب س ج کے تو س ا اور س اَ ایک دوسرے پہ لائے تو جا سکتے
ہیں لیکن ایسا کرنے سے س ا اور س اَ دونوں سطح مستوی
ب س ج میں واقع ہونگے اور اس وجہ سے کوئی مجسم زاویہ
نہیں بن سکیگا۔

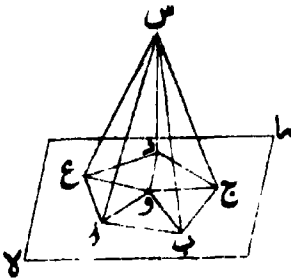
(۳) اگر ∠ ب س ا + ∠ ج س اَ ملکر بڑے ہوں
∠ ب س ج سے تو جب س ا اور س اَ کو سطح مستوی ب س ج

میں لایا جائے گا تو یہ ایک دوسرے سے تجاوز کر جائیں گے،
لہٰذا ان کو سطح مستوی ب س ج کے باہر ایک دوسرے
پر منطبق کیا جا سکتا ہے یعنی اس صورت میں ایک مجسم زاویہ
بن سکتا ہے۔

مشقیں

۱۔ ثابت کرو کہ بالعموم تین مستوی سطحیں ایک نقطہ پر ملتی ہیں،
اس کی تین مستثنیٰ صورتیں بتاؤ۔
۲۔ ثابت کرو کہ ایک معوج ذوار بعۃ الاضلاع کے چار زاویوں
کا مجموعہ ہمیشہ ۳۶۰° سے کم ہوتا ہے۔
۳۔ ایک نقطۂ مفروضہ سے تین خط و ا، و ب، و ج کھینچے
گئے ہیں جو ایک ہی سطح مستوی میں واقع نہیں ہوتے اور اس مجسم
زاویہ کے اندر جس کی تعیین خطوط مستقیم و ا، و ب، و ج
سے ہوتی ہے ایک اور خط مستقیم و لا کھینچا گیا ہے ثابت کرو کہ
(۱) زوایا ا و لا، ب و لا، ج و لا کا مجموعہ، زوایا
ا و ب، ب و ج، ج و ا کے نصف مجموعہ سے زیادہ ہے
(۲) زوایا ا و لا اور ج و لا کا مجموعہ زوایا ا و ب اور
ج و ب کے مجموعہ سے کم ہے۔
(۳) زوایا ا و لا، ب و لا اور ج و لا کا مجموعہ، زوایا
ا و ب، ب و ج اور ج و ا کے مجموعہ سے کم ہے۔

مسئلہ اثباتی ۲۰ [اقلیدس م ۱۱ ش ۲۱]

ایک محدّب مجسم زاویہ میں طرفی زاویوں کا مجموعہ چار قائموں سے کم ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ (س' ا ب ج د ع) ایک محدّب مجسم زاویہ ہے۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ طرفی زاویوں ا س ب، ب س ج، ج س د، د س ع، ع س ا کا حاصل جمع چار قائموں سے کم ہے۔

ایک سطح مستوی لاما کھینچو جو طرفی زوایا کی مستوی سطحوں کو خطوط مستقیم ا ب، ب ج، ج د، د ع، ع ا پر قطع کرے اور اس طرح سے ایک محدّب کثیر الاضلاع ا ب ج د ع بنائے۔

کثیر الاضلاع ا ب ج د ع کے اندر ایک نقطہ و لو اور و ا، و ب، و ج، و د، و ع کو ملاؤ۔

ثبوت ۔ سہ سطحی زاویہ ا میں حاصل جمع ∠ س ا ب + ∠ س ا ع بڑا ہے ∠ ع ا ب سے

یعنی بڑا ہے ∠ و ا ع + ∠ و ا ب سے [مسئلہ ۱۹]

اسی طرح سے ہر ایک راسِ زوایہ ب، ج، د، ع کے لئے۔

لہٰذا جن مثلثوں کے راس نقطہ س پر ہیں اُن کے قاعدوں پر کے زاویوں کا مجموعہ بڑا ہے اُن تمام مثلثوں کے قاعدوں پر کے زاویوں کے مجموعہ سے، جن کے راس نقطہ و پر ہیں اور چونکہ دونوں صورتوں میں مثلثوں کی تعداد ایک ہی ہے اس لئے دونوں صورتوں میں تمام زاویوں کے مجموعے بھی مساوی ہونگے، اس سے معلوم ہوتا ہے کہ س پر کے سب زاویوں کا مجموعہ و پر کے سب زاویوں کے مجموعہ سے کم ہے۔ لیکن و پر کے سب زاویے چار قائموں کے برابر ہیں، اس لئے س پر کے سب زاویوں کا مجموعہ چار قائموں سے کم ہے۔

(متفرق) مشقیں

۱۔ ایک مائل خط اور سطح مستوی کے نقطہ تقاطع میں سے اُس سطح میں دو خط کھینچے گئے ہیں جن میں سے ایک تو خطِ مائل کا ظل ہے اور دوسرا کوئی اور خط، ثابت کرو کہ مائل اور اس کے ظل کا درمیانی زاویہ، مائل اور دوسرے خط کے درمیانی زاویہ سے چھوٹا ہوتا ہے

۲۔ بتاؤ کہ ایک سطح مائل میں اس کے کسی نقطہ میں سے ایسا خط کس طرح کھینچا جاسکتا ہے جو افقی سطح سے بڑے سے بڑا زاویہ بنائے۔

۳۔ ایک سطح مستوی میں ایک ثابت نقطہ و ہے اور اس کے باہر ایک اور ثابت نقطہ ن ہے، اگر نقطہ ن میں سے اُن تمام

خطوں پر عمود نکالے جائیں جو نقطہ و سے سطح مستوی میں کھینچے جاسکتے ہیں تو ان عمودوں کے پایوں کا طریق دریافت کرو۔

۴۔ ایک نقطہ ا سے دو متقاطع مستویات پر عماد ا ن، ا ق کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ

(۱) مستویات کا خطِ تقاطع ا ن، ا ق کی سطح مستوی پر عمود ہے

(۲) متقاطع سطوح کا دوسطحی زاویہ، عمادوں کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہے یا اس کا مکمل ہے۔

۵۔ اگر ا ب، ج د دو معوج خط ہوں تو ثابت کرو کہ خطوط ا ج، ب د بھی معوج ہونگے۔

ان معوج خطوط ا ب، ج د کے ظل کن مستوی سطحوں پر ایک دوسرے کے متوازی ہونگے؟

۶۔ ثابت کرو کہ فضا کے کسی دئے ہوئے نقطہ میں سے صرف ایک ہی خط کھینچا جاسکتا ہے جو دو مفروضہ معوج خطوں میں سے ہر ایک کو قطع کرے۔

۷۔ وا، وب، وج تین متراکز خطوط مستقیم ہیں اور ان میں سے ہر ایک باقی دو پر عمود ہے، ثابت کرو کہ

(۱) اگر ولا، وما، وے بالترتیب ب ج، ج ا، ا ب پر عمود ہوں تو مثلث لاماے، مثلث ا ب ج کا مثلث پائیں ہوگا

(۲) اگر ا ب ج کی سطح مستوی پر عمود و ن نکالا جائے تو ن مثلث ا ب ج کا مرکزِ عمودی ہوگا۔

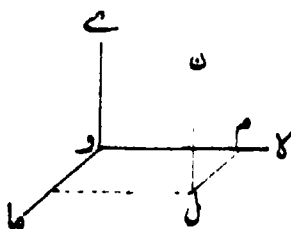
۸۔ ا ب ج د ایک سطح مائل ہے اور اس سطح میں ا ب، ج د

افقی خط ہیں، اور ا د، ب ج خطوطِ میلانِ اعظم ہیں نیز ا د، ب ج کے ظل افقی سطح پر بالترتیب ا ف، ب ع ہیں

اگر ∠ ج ب ع = عہ
∠ د ا ج = بہ
∠ ج ا ع = طہ
∠ ف ا ع = فہ

تو ثابت کرو کہ

(۱) جب طہ = جب عہ جم بہ (۲) مس فہ = مس بہ قط عہ
(۳) مس عہ = مس طہ قط فہ (۴) جب بہ = جب فہ جم طہ

حوالہ کے محوروں کے ذریعہ فضا میں کسی نقطہ کے مقام کا تعیُّن

فرض کرو کہ و لا، و ما دو ثابت مستقیم خط ہیں جو ایک دوسرے کو مبدأ و پر علی القوائم قطع کرتے ہیں، و لا، و ما کی سطح مستوی پر و سے عمود کھینچو، تب خطوط و لا، و ما، و ے یں سے ہر ایک باقی دو خطوط پر اور اس لئے ان کی سطح

مستوی پر عمود ہے، خطوط و لا، و ما، و مے کو حوالہ کے لئے محور قرار دیتے ہیں اور کسی نقطہ کے محل کا تعین بلحاظ ان محوروں کے حسب ذیل طریقہ سے کیا جاتا ہے۔

فرض کرو کہ نقطہ ن کا ظل سطح مستوی لا و ما پر ل ہے نیز فرض کرو کہ نقطہ ل کے محدّد بلحاظ محاور و لا، و ما کے و م، م ل ہیں اور لا، ما، ی بالترتیب و م، م ل، ل ن کے طولوں کو تعبیر کرتے ہیں، تب و م، م ل، ل ن کو نقطہ ن کے محدد کہتے ہیں۔

نقطہ ن کو (لا، ما، ی) سے تعبیر کرتے ہیں اور اگر (لا، ما، ی) کی عددی قیمتیں معلوم ہوں تو نقطہ ن کا محل معلوم ہو سکتا ہے۔

مثال ۱ – ایک نقطہ کے محدد ۵، ۳، ۴ ہیں، نقشہ پر نقطہ کے مقام کی نشان دہی کرو۔

پہلے بلحاظ محاور و لا، و ما کے اُس نقطہ کی نشان دہی کرو جس کے محدد ۵، ۳ ہیں، اس نقطہ کا نام ل رکھو اور ل ن سطح مستوی لا و ما پر عمود کھینچو اور اس کے طول کو چار اکائیوں کے مساوی بناؤ، اس طرح نقطہ ن کا محل معلوم ہو گیا۔

ظاہر ہے کہ نقطہ ن کے محدّد دراصل اس کے فاصلے ہیں حوالہ کی سطوح مستوی ما و مے، مے و لا، لا و ما سے، اب یہ سطحیں فضا کو آٹھ حصوں میں تقسیم کرتی ہیں اور ان سب حصوں میں ایک ایک نقطہ ایسا ہے جن کے فاصلے ان سطوح مستویہ سے ۵، ۳، ۴ ہیں، ان سب نقطوں کے محدّدوں کو ان اصولوں

کے مطابق جن کی تشریح پہلے ہو چکی ہے مثبت اور منفی علامتوں کے ذریعہ تمیز کیا جاتا ہے۔

جو خط محاور و لا، و ما، و ی پر یا ان کے متوازی اُن سمتوں میں ناپے جائیں جو ان محاور کے حروف سے ظاہر ہوتی ہیں وہ **مثبت خطوط** کہلاتے ہیں اور جو ان محاور پر یا ان کے متوازی مقابل سمتوں میں ناپے جائیں وہ **منفی خطوط** کہلاتے ہیں

مشقیں

۱ ــ ذیل کے نقطوں کے محل شکل میں دکھاؤ۔

(۱) (۳، ۵، ۴)   (۲) (-۵، ۲، ۳)

(۳) (-۳، ۴، ۵)   (۴) (۴، ۵، -۳)

۲ ــ ایک نقطہ ن کے محدد (۶، ۸، ۱۰) ہیں، و ن کے وسطی نقطہ ق کے محدد معلوم کرو۔

۳ ــ اگر کسی نقطہ ن کے محدد (لا، ما، ی) ہوں تو ثابت کرو کہ و ن^2 = لا^2 + ما^2 + ی^2

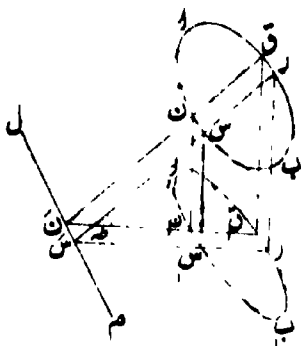
اگر نقطہ ن (۳، ۴، ۱۲) ہو تو و ن کا طول معلوم کرو۔

مجسم اشکال

۱ ۔ اگر ایک مستوی شکل کو متساوی الفصل، متوازی مستقیم خطوں سے کاٹ کر چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کیا جائے اور ان خطوں میں سے دو دو کو علی التسلسل لینے سے مستطیل بنائے جائیں جیساکہ اس شکل میں کیا گیا ہے تو ہم ان ٹکڑوں کے عرض کو لا انتہا کم کرنے سے شکل مفروضہ اور خطوط مستقیم سے بنی ہوئی باہر کی شکل کے رقبوں کے تفاوت کو جتنا چاہیں کم کر سکتے ہیں، بالفاظ دیگر شکل مفروضہ کا رقبہ ایسے سب مستطیلی ٹکڑوں کے مجموعہ کی انتہائی قیمت کے مساوی خیال کیا جا سکتا ہے جبکہ ان ٹکڑوں کے عرض کو لا انتہا کم کر دیا جائے۔

۲ ۔ اگر ا ب ایک مستوی شکل ہو اور اس کا ظل کسی اور مستوی سطح پر جو ا ب کی سطح سے زاویہ ط بنائے ا, ب, ہو تو

ظل ا, ب, کا رقبہ = شکل ا ب کا رقبہ × جم ط

فرض کرو کہ ان سطحوں کا خطِ تقاطع ل م ہے،

شکل ا ب کو ایسے متوازی خطوط کے ذریعہ جو سب کے سب ل م پر عمود ہوں چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کرو۔ فرض کرو کہ اس قسم کا ایک ٹکڑا ن ق رس ہے اور اس کا ظل ن، ق، ر، س، ہے۔

اب اگر ن ق ر س کے عرض کو اور اس طرح ن، ق، ر، س، کے عرض کو نہایت کم کر دیا جائے تو انتہائی صورت میں دونوں ٹکڑے مستطیل شکل کے ہونگے اور ان دونوں کا عرض ایک ہی (یعنی نَ سَ) ہوگا

نیز چونکہ ن، ق، کا طول = ن ق جم طہ

اس لئے ن، ق، ر، س، کا رقبہ = ن ق ر س کا رقبہ × جم طہ

اسی طرح سے متناظر ٹکڑوں کے ہر زوج کے لیے یہی ربط درست ہوگا جبکہ ان کے عرض کو لا انتہا کم کر دیا جائے

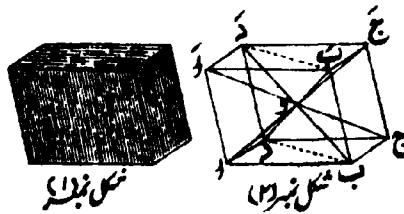
∴ شکل ا، ب، کا رقبہ = شکل ا ب کا رقبہ × جم طہ

۳ ۔ ایک **مجسم شکل** یا **محض مجسم** سے فضا کا وہ حصہ مراد ہے جو ایک یا ایک سے زیادہ مستوی یا منحنی سطحوں سے گھرا ہوا ہو۔ ان سطحوں کو مجسم کے **رُخ** کہتے ہیں اور ہر دو متصل رخوں کا خط تقاطع **کنارہ** کہلاتا ہے۔

۴۔ کثیر السطوح سے مراد وہ مجسم ہے جو سطوح مستوی سے گھرا ہوا ہو۔

نوٹ۔ ایک مستوی مستقیم الاضلاع شکل میں ضروری ہے کہ کم از کم تین مستقیم خط ہوں، لیکن اگر دو خط متوازی ہوں تو کم از کم چار خط ہونے چاہئیں، اسی طرح سے ایک کثیر السطوح میں ضروری ہے کہ کم از کم چار سطحیں یا رخ ہوں لیکن اگر دو رخ متوازی ہوں تو کم از کم پانچ رُخ ہونے چاہئیں۔

۵۔ متوازی السطوح وہ مجسم ہے جو متوازی سطوح مستوی کے تین زوجوں سے گھرا ہوا ہو۔

شکل نمبر (۱) شکل نمبر (۲)

شکل ۲ میں سطح مستوی ا ب اَ بَ دو متوازی سطوح مستوی ا ب ج د اور اَ بَ جَ دَ کو قطع کرتی ہے اسلئے کنارے ا ب، اَ بَ باہم متوازی ہیں۔ [مسئلہ ۱۱]

اسی طرح سے ثابت ہو سکتا ہے کہ (۱) متوازی السطوح کے چھ رخوں میں سے ہر ایک رخ ایک متوازی الاضلاع ہے (۲) مقابل کے رخ ہر لحاظ سے ایک دوسرے کے مساوی ہیں اور (۳) بارہ کنارے چار چار کناروں کے تین جتھوں میں منقسم ہوتے ہیں اور ہر ایک جتھ

کے چارکنارے ایک دوسرے کے متوازی اور برابر ہیں۔

۶۔ ایک متوازی السطوح کے چار قطر ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

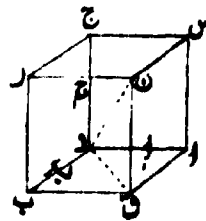
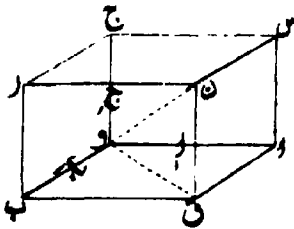
فرض کرو کہ متوازی السطوح (ا ب ج د، اَ بَ جَ دَ) کے قطر ا جَ، ب دَ، ج اَ، اور د بَ ہیں،

ب د، بَ دَ کو ملاؤ

ثبوت ۔ چونکہ ب بَ، د دَ ایک دوسرے کے متوازی اور مساوی ہیں اس لئے شکل ب د دَ بَ متوازی الاضلاع ہے۔

∴ اس کے قطر ب دَ، د بَ ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں یعنی خط ب دَ، د بَ کے وسطی نقطہ و میں سے گزرتا ہے۔

اسی طرح سے حسب سابق د اَ اور بَ ج کو ملانے سے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اَ ج، د بَ کے وسطی نقطہ و میں سے گزرتا ہے اسی طرح سے اج کی تنصیف و پر ہوتی ہے۔

۷۔ جس متوازی السطوح کے رخ مستطیل شکل کے ہوں اس کو

مکعب نما یا مستطیلی مجسم کہتے ہیں، اگر اس کا ہر ایک رخ مربع ہو تو متوازی السطوح کو مکعب کہتے ہیں۔

اشکال بالا میں ∠ ج و ا اور ∠ ج و ب دونوں قائمے ہیں

∴ خط و ج رُخ ا ب پر عمود ہے۔

اسی طرح سے ہر ایک کنارہ اُن دو سطحوں پر عمود ہے جن کو یہ قطع کرتا ہے اور ہر ایک رخ اُن چار رُخوں پر عمود ہے جنکو یہ قطع کرتا ہے۔

۸۔ ایک مستطیلی مجسم کے قطر کا مربع اس کے تین متراکز کناروں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مکعب نما کے تین متراکز کنارے و ا، و ب، و ج ہیں جن کے طول بالترتیب $ا_۱$، $ب_۱$، $ج_۱$ ہیں اور اس کا قطر و ن ہے۔

و ق کو ملاؤ۔

تب چونکہ ن ق عمود ہے رُخ ا ب پر، اس لئے یہ و ق پر بھی عمود ہے

$$\therefore \text{و ن}^۲ = \text{و ق}^۲ + \text{ن ق}^۲ = \text{و ق}^۲ + \text{ج}_۱^۲$$

$$\text{لیکن } \text{و ق}^۲ = \text{و ا}^۲ + \text{ا ق}^۲ = \text{ا}_۱^۲ + \text{ب}_۱^۲$$

کیونکہ ∠ و ا ق قائمہ ہے

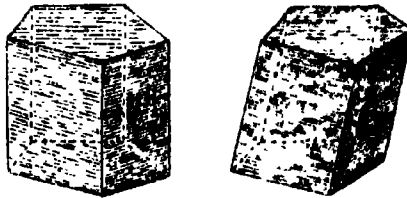
$$\therefore \text{و ن}^۲ = \text{ا}_۱^۲ + \text{ب}_۱^۲ + \text{ج}_۱^۲$$

فرع ۱۔ ایک مکعب نما کے سب قطر باہم مساوی ہوتے ہیں

فرع ۲۔ اگر ایک مکعب کا ہر ایک کنارہ $ا_۱$ ہو

تو $\text{قطر}^۲ = ۳\,\text{ا}_۱^۲ \quad \therefore \text{قطر} = \text{ا}_۱\sqrt{۳}$

نوٹ ۔ اگر کسی نقطہ ن کے محدد (لا، ما، ی) سے تعبیر کئے جائیں اور نقطہ و مبدا ہو تو و ن^2 = لا^2 + ما^2 + ی^2

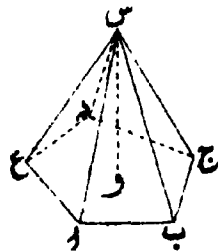
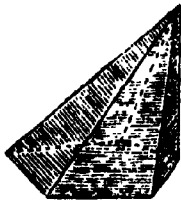
۹ ۔ منشور وہ مجسم ہے جو ایسی مستوی سطحوں سے گھرا ہوا ہو جن میں سے دو سطحیں (جو منشور کے سرے کہلاتی ہیں) ایک دوسرے کے متوازی اور ہر طرح سے مساوی ہوں اور باقی (جن کو طرفی رُخ یا پہلو کہتے ہیں) شکل میں متوازی الاضلاع ہوں ۔

ایک منشور کے سرے مثلث، ذو اربعۃ الاضلاع اور کسی تعداد اضلاع کی اشکال کثیر الاضلاع ہوسکتی ہیں اور ان پر جو منشور بنتے ہیں ۔ ان کو بالترتیب مثلثی، ذو اربعۃ الاضلاعی یا کثیر الاضلاعی منشور کہتے ہیں

ہر منشور کے طرفی کنارے مساوی اور متوازی ہوتے ہیں، جس منشور کے طرفی کنارے اس کے سروں پر عمود ہوں اس کو قائم منشور کہتے ہیں، ایسے منشور کے طرفی رُخ شکل میں مستطیل ہوتے ہیں، باقی سب کو مائل منشور کہتے ہیں ۔

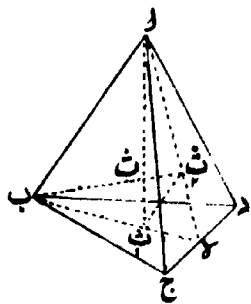
متوازی السطوح منشور کی ایک خاص صورت ہے اور مکعب نما اور مکعب، قائم منشوروں کی خاص صورتیں ہیں۔

مسئلہ ۱۱ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ منشور کی مستوی تراش جو ایک سرے کے متوازی ہو وہ ہر سرے کے ہر طرح سے مساوی ہوتی ہے

۱۰۔ **مخروطِ مضلع** وہ مجسم ہے جو مستوی سطحوں سے گھرا ہوا ہو جن میں سے ایک سطح جس کو **قاعدہ** کہتے ہیں کوئی مستقیم الاضلاع شکل ہو اور باقی سطحیں مثلث ہوں جن کے راس ایک ہی نقطہ پر قاعدہ کی سطح کے باہر واقع ہوں۔

اگر ایک مخروطِ مضلع کا قاعدہ کوئی منتظم کثیر الاضلاع ا ب ج د ع ہو اور اس کا راس س اُس خط پر واقع ہو جو قاعدہ کے وسطی نقطہ و (یعنی اندرونی یا بیرونی دائرہ کے مرکز) سے قاعدہ پر

عمود ہو تو مخروطِ مضلع کو قائم مخروطِ مضلع کہتے ہیں۔

١١- ذو اربعۃ السطوح (چہار سطحی) وہ مخروط مضلع ہے جسکا قاعدہ ایک مثلث ہو۔ ظاہر ہے کہ چار مثلثی رخ اس مجسم کا احاطہ کرتے ہیں

١٢- وہ چار خطوط مستقیم جو ذو اربعۃ السطوح کے ہر ایک راس کو اس کے مقابل کے رخ کے ہندسی مرکز سے ملاتے ہیں وہ سب کے سب ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور یہ نقطہ ان میں سے ہر ایک کو نسبت ۳ : ۱ میں تقسیم کرتا ہے۔

ایک ذو اربعۃ السطوح (ا، ب ج د) میں فرض کرو کہ ان رخوں کے ہندسی مرکز جو رؤس الزوایا ا، ب، ج، د کے مقابل ہیں بالترتیب ث$_{۱}$، ث$_{۲}$، ث$_{۳}$، ث$_{۴}$ ہیں

ثابت یہ کرنا ہے کہ ا ث$_{۱}$، ب ث$_{۲}$، ج ث$_{۳}$، د ث$_{۴}$ ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

کنارہ ج د کا وسطی نقطہ لا ہو تو ث$_{۱}$ اور ث$_{۲}$ لازماً ب لا اور ا لا پر بالترتیب واقع ہونگے اور ب لا = ۳ ث$_{۱}$ لا،

نیز ا لا = ۳ ث$_{۲}$ لا

لہذا ث$_{۱}$ ث$_{۲}$، ا ب کے متوازی ہے

نیز ا ث$_{۱}$، ب ث$_{۲}$ ضرور ایک دوسرے کو قطع کرینگے کیونکہ یہ دونوں سطح مستوی ا لا ب میں واقع ہیں۔ اگر ان کا نقطہ تقاطع ث ہو تو متشابہ مثلثوں سے

ا ث: ث ث۴ = ا ب: ث۴ ث۲

= الا : لا ث۲ = ۳ : ۱

∴ ب ث۲، ا ث۱ کو ایک ایسے نقطہ ف پر قطع کرتا ہے جس کا فاصلہ ث۱ سے = $\frac{1}{4}$ ا ث۱

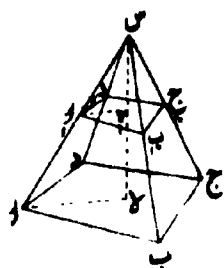
اسی طرح سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ج ث۳، د ث۴ دونوں ا ث۱ کو اسی نقطہ پر قطع کرتے ہیں، یعنی یہ سب خطوط ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں

مشق تین خطوطِ مستقیم جو ایک ذو اربعۃ السطوح کے مقابل کے کناروں کے وسطی نقطوں کو ملاتے ہیں ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

[فرض کرو کہ ج د، د ا، ا ب، ب ج کے وسطی نقطے بالترتیب لا، ما، ے، ھ ہیں، پہلے مسئلہ ۸ مشق ۲ کی رو سے ثابت کرو کہ شکل لا، ما، ے، ھ ایک متوازی الاضلاع ہے، پھر اس کے قطروں پر غور کرو]

۱۳۔ (۱) قاعدہ کے متوازی مخروطِ مضلع کی کوئی مستوی تراش قاعدہ کے متشابہ ہوتی ہے

(۲) ایسی کسی تراش کا رقبہ اس فاصلہ کے مربع کے متناسب ہوتا ہے جو اس تراش کا مخروطِ مضلع کے راس سے ہو۔

فرض کرو کہ مخروطِ مضلع (س، ا ب ج د) میں تراش (ا۱ ب۱ ج۱ د۱) قاعدہ (ا ب ج د) کے متوازی ہے۔

(۱) چونکہ سطوح مستوی
ا۱ ب۱ ج۱ د۱ اور ا ب ج د
متوازی ہیں اور سطح مستوی
ا۱ ب۱ ا ب ان دونوں کو
قطع کرتی ہے اس لئے خطوط
تقاطع ا۱ ب۱، ا ب متوازی
ہیں۔

اسی طرح سے ب۱ ج۱، ب ج
اور ج۱ د۱، ج د اور د۱ ا۱، د ا متوازی ہیں۔
∴ اشکال ا۱ ب۱ ج۱ د۱ اور ا ب ج د کے متناظر زاویے
برابر ہیں۔

اور متشابہ مثلثوں سے ا۱ب۱ / اب = ب۱ج۱ / ب ج = ج۱د۱ / ج د = د۱ا۱ / د ا

لہٰذا اشکال ا۱ ب۱ ج۱ د۱ اور ا ب ج د ایک دوسرے
کے متشابہ ہیں۔

(۲) فرض کرو کہ اگر راس س میں سے قاعدہ پر عمود
نکالا جائے تو یہ عمود تراش ا۱ ب۱ ج۱ د۱ سے ل۱ پر اور
ا ب ج د سے ل پر ملتا ہے، ا۱ل۱، ال کو ملاؤ

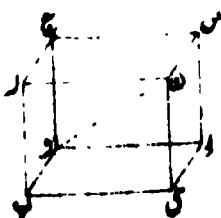
تب شکل ا۱ ب۱ ج۱ د۱ : شکل ا ب ج د
= ا۱ب۱² : اب²
= س ا۱² : س ا² [متشابہ مثلثوں سے]

= س ل^2 : س ل^2

نتیجہ صریح۔ اگر دو مضلع مخروطوں کے ارتفاع اور اُن کے قاعدوں کے رقبے باہم مساوی ہوں تو مضلع مخروطوں کی اُن تراشوں کے رقبے جو قاعدوں کے متوازی ہوں اور جن کے فاصلے راسوں سے برابر ہوں باہم مساوی ہوں گے۔

مشقیں

۱۔ لوہے کی ایک مربع چادر کا ہر ایک ضلع ۱۲ فٹ ہے اس کو ایک دیوار کے ساتھ اس طرح کھڑا کیا گیا ہے کہ اس کا زاویۂ میلان افق کے ساتھ ۶۰ درجہ ہے' بتاؤ کہ زمین کے کس قدر رقبہ کو یہ انتصابی سمت کی بارش سے محفوظ رکھ سکتا ہے؟

۲۔ (۱) ذیل کے مستطیلی مجسم میں و ا = ۱۲ سنتی میٹر' و ب = ۹ سنتی میٹر' و ج = ۸ سنتی میٹر۔ و ن' جم ق و ن اور شکل و ا ن ر کے رقبہ کی قیمتیں دریافت کرو۔

(۲) اگر و ن خطوط و ا' و ب' و ج کے ساتھ بالترتیب زاویے عہ' بہ' جہ بنائے تو ثابت کرو کہ جم^{2}عہ + جم^{2}بہ + جم^{2}جہ = ۱ اور ان خطوں کی جو قیمتیں اوپر مندرج ہیں اُن کے لحاظ سے اس نتیجہ کی تصدیق کرو۔

(۳) دن میں سے گزرنے والی کونسی سطح مستوی ب ق کے متوازی ہے؟

اگر وا = ا، وب = ب، وج = ج تو ثابت کرو کہ دن اور ب ق کے درمیان چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ

$\frac{ب ج}{\sqrt{ب^2 + ج^2}}$ ہے۔

۳۔ اگر ایک متوازی السطوح کو ایک ایسی سطح مستوی سے کاٹا جائے جو اس کے متقابل رخوں کے دو زوجوں کو قطع کرے تو ثابت کرو کہ خطوط تقاطع ایک متوازی الاضلاع بناتے ہیں۔

۴۔ ثابت کرو کہ وہ اشکال کثیر الاضلاع جو کسی منشور کو متوازی سطوحِ مستوی سے کاٹنے سے حاصل ہوتی ہیں ہر طرح سے ایک دوسرے کے مساوی ہوتی ہیں۔

۵۔ اگر ایک ذو اربعۃ السطوح کا ہر ایک کنارہ مقابل کے کنارے کے برابر ہو تو ثابت کرو کہ ہر کونے پر کے تین مستوی زاویوں کا مجموعہ ۱۸۰° کے برابر ہے۔

۶۔ دو مستوی سطحیں ایک دوسرے کو ۴۵° کے زاویہ پر کاٹتی ہیں اور ایک سطح پر ۵ سنتی میٹر کے نصف قطر کا دائرہ کھینچا گیا ہے اور اس کا ظل دوسری مستوی سطح پر بنایا گیا ہے۔

(۱) ظل کے سب سے بڑے وتر کا طول اور (۲) ظل کا رقبہ دریافت کرو۔

۷۔ اگر ایک ذو اربعۃ السطوح کو ایک سطح مستوی سے کاٹا جائے

جو اس کے مقابل کے کسی دو کناروں کے متوازی ہو، تو ثابت کرو کہ تراش متوازی الاضلاع ہوگی۔

۸۔ ثابت کرو کہ ایک منتظم ذو اربعۃ السطوح کے مقابل کے کناروں کا چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ اُس مربع کے قطر کا نصف ہوگا جو مجسم مذکور کے ایک کنارہ پر بنایا جائے۔

۹۔ اگر ایک ذو اربعۃ السطوح میں مقابل کے کناروں کے دو زوج ایسے ہوں کہ ہر زوج کے کنارے آپس میں زاویہ قائمہ بنائیں تو ثابت کرو کہ تیسرے زوج کے کنارے بھی آپس میں زاویہ قائمہ بنائیں گے۔

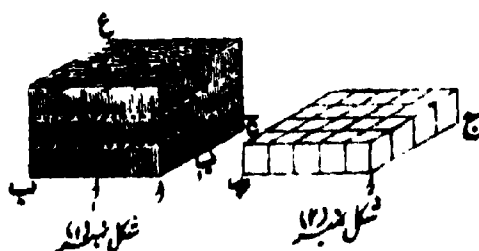
۱۰۔ اگر ایک ذو اربعۃ السطوح میں مقابل کے کنارے ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں تو مقابل کے کناروں کے مربعوں کا مجموعہ ہر زوج کی صورت میں وہی ہوگا۔

سطحیں اور حجم

۱۴۔ کسی مجسم کے حجم سے فضا کا وہ حصہ مراد ہوتا ہے جو مجسم کے احاطہ کرنے والی سطحوں کے اندر گھرا ہوا ہو۔

ایک **مکعب انچ** ایک ایسے مکعب کے حجم کو تعبیر کرتا ہے جسکے ہر کنارے کا طول ایک انچ ہو، اسی طرح ایک مکعب سنٹی میٹر ایک ایسے مکعب کے حجم کو تعبیر کرتا ہے جس کے ہر کنارے کا طول ایک سنٹی میٹر ہو، پس حجم کی اکائی سے مراد ایک ایسے مکعب کا حجم ہے جس کا ہر کنارہ طول کی ایک اکائی کے برابر ہو۔

۱۵ - ایک مستطیلی مجسم کی سطح اور حجم دریافت کرو۔

شکل نمبر (۱) شکل نمبر (۲)

سطح ۔ فرض کرو کہ شکل (۱) کے مکعب نما میں طول اب = ا اکائیاں عرض اج = ب اکائیاں اور ارتفاع اد = ج اکائیاں

اب مجسم کی کل سطح مقابل کے مساوی مستطیل رخوں کے تین زوجوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

لیکن دع ، د ب ، د ج رخوں میں بالترتیب اب، اج، ب ج رقبہ کی اکائیاں شامل ہیں۔

∴ مجسم کی کل سطح = ۲ ا ب + ۲ ا ج + ۲ ب ج رقبہ کی اکائیاں۔

اگر ا = ب = ج، تو مستطیلی مجسم ایک مکعب بن جاتا ہے جس کے ہر کنارے میں طول کی ا اکائیاں ہوتی ہیں، سلئے مکعب کی کل سطح = ۶ ا۲ رقبہ کی اکائیاں

حجم ۔ ایک مکعب نما پر غور کرو جس کا طول اب = ۵ انچ، عرض اج = ۴ انچ، ارتفاع اد = ۳ انچ، شکل (۱) سے ظاہر ہے کہ مجسم مذکور تین مساوی قاشوں میں منقسم

ہو سکتا ہے جن میں سے ہر قاش کی موٹائی ایک انچ ہے، نیز ہر قاش کو پھر (دیکھو شکل ۲) مکعبی ٹکڑوں میں تقسیم کر سکتے ہیں جن میں سے ہر ٹکڑے کے مساوی کنارے ایک ایک انچ ہیں، پس ہر ٹکڑا ایک مکعب انچ کے برابر ہوگا۔

اب ایک قاش میں مکعب انچوں کی تعداد ۵ × ۴ ہے

پس کل مجسم میں مکعب انچوں کی تعداد = ۵ × ۴ × ۳ = ۶۰

اسی طرح سے اگر طول = ا خطی اکائیاں

عرض = ب خطی اکائیاں

ارتفاع = ج خطی اکائیاں

تو مستطیلی مجسم میں حجم کی ا × ب × ج اکائیاں ہوں گی

اور اگر ایک مکعب کا ہر ایک کنارہ = ا خطی اکائیاں

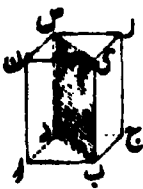
تو اس مکعب میں ا^۳ حجم کی اکائیاں ہونگی۔

یہ مفہوم اختصاراً اس طرح ادا کیا جاتا ہے

مکعب نما کا حجم = طول × عرض × ارتفاع ...... (۱)

= قاعدہ کا رقبہ × ارتفاع .... (۲)

مکعب کا حجم = (کنارہ)^۳ .... (۳)

فرع۔ ایک مکعب نما (ا ب ج د، ن ق ل س) کو اس کی قطری سطح مستوی ب د س ق دو ایسے قائم منشوروں میں تقسیم کرتی ہے جن کے قاعدے متطابق

قائم الزاویہ مثلث ہیں اور نیز یہ دونوں منشور ہر لحاظ سے ایک دوسرے کے مساوی ہیں اور ہر ایک کا حجم پورے مکعب نما کے حجم کا نصف ہے۔

مشقیں

۱۔ ایک کمرہ کے طول، عرض، اور بلندی میں بالترتیب ا، ب اور ج اکائیاں شامل ہیں، ثابت کرو کہ چار دیواروں میں رقبہ کی ۲ج(ا+ب) اکائیاں ہوں گی، اگر چار دیواروں کا رقبہ ۸۶٫۷۰ مربع میٹر ہو اور بلندی ۳٫۸۰ میٹر، تو فرش کا مجموعۂ اضلاع معلوم کرو۔

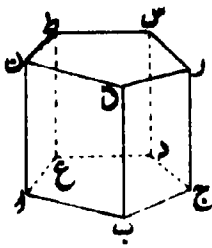
۲۔ اگر ایک حوض کی لمبائی چوڑائی اور گہرائی بالترتیب ۱۲۵ سنتی میٹر ۸۰ سنتی میٹر اور ۶۵ سنتی میٹر ہو، تو اس کی گنجائش میٹروں میں دریافت کرو، نیز اس پانی کا وزن کلوگراموں میں دریافت کرو جو حوض کے $\frac{4}{5}$ حصہ کو بھر سکے۔

۳۔ ایک خاص مقام پر سالانہ بارش ۶۵ سنتی میٹر ہوتی ہے۔ بتاؤ کہ یہ فی ہکٹر کتنے لیٹروں کے مساوی ہے؟

۴۔ سنگ مرمر کے ایک مستطیلی ٹکڑے کے ابعاد ۱٫۲۰ میٹر، ۷۵ء میٹر اور ۵۰ء میٹر ہیں، اگر سنگ مرمر کا وزن فی مکعب دسی میٹر ۲٫۶۴ کلوگرام ہو تو پورے ٹکڑے کا وزن دریافت کرو۔

[مکعب نما مجسمات پر مزید مشقوں کے لئے ملاحظہ ہو صفحہ ۸۰]

۱۶۔ ایک قائم منشور کی طرفی سطح کا رقبہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ مفروضہ منشور کے قاعدہ کے اضلاع اب، ب ج، ج د،.... میں بالترتیب طول کی

ا، ب، ج ...... اکائیاں شامل ہیں اور منشور کا ارتفاع ف ہے۔

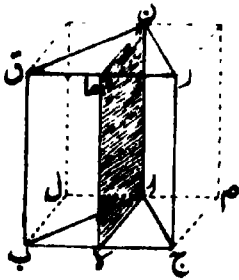
چونکہ منشور قائم ہے اسلئے اس کے ہر ایک رخ کا کنارہ ف ہے اور ہر طرفی رخ یا پہلو ایک مستطیل ہے۔

تب مستطیل ا ب ق ن کا رقبہ = اِ ف اور اسی طرح سے باقی پہلوؤں کے رقبے بالترتیب ب ف، ج ف، ...ہیں

∴ منشور کی طرفی سطح کا رقبہ = اِ ف + بِ ف + جِ ف + ...

= (اِ + بِ + جِ + ...) ف رقبہ کی اکائیاں

= قاعدہ کا محیط × ارتفاع

۱۷۔ ایک قائم منشور کا حجم دریافت کرو۔

(۱) پہلے ایک مثلثی منشور (ا ب ج، ن ق ر) پر غور کرو اور فرض کرو کہ اس کا ارتفاع ف ہے۔

ان میں سے ایک سطح مستوی ا ن ما لا کھینچو جو رُخ ب ج ر ق پر عمود ہو، یہ سطح منشور مذکور کو دو ایسے منشوروں میں تقسیم کرتی ہے

جن کے قاعدے قائم الزاویہ مثلث ا لا ب اور ا لا ج ہیں۔

و میں سے ل م، ب ج کے متوازی کھینچو اور مستطیل ب ل م ج کی تکمیل کرو، پھر مستطیل ب ل م ج کو قاعدہ مان کر اسپر ایک مکعب نما بناؤ جس کا ارتفاع ف ہو۔

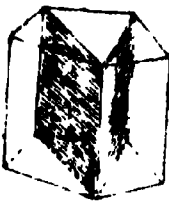
تب قاعدہ ا لا ب پر کا منشور = $\frac{1}{2}$ (قاعدہ ا لا ب ل پر کا مکعب نما)

اور قاعدہ الا ج پر کا منشور = $\frac{1}{2}$ (قاعدہ ا لا ج م پر کا مکعب نما)

∴ قاعدہ ا ب ج پر کا منشور مفروضہ = $\frac{1}{2}$ (قاعدہ ل ب ج م پر کا مکعب نما)

= $\frac{1}{2}$ مستطیل ل ب ج م × ارتفاع

= (قاعدہ ا ب ج کا رقبہ) × ارتفاع

(۲) اسی طرح سے اگر منشور کا قاعدہ کوئی کثیر الاضلاع ہو تو اس کو ہمیشہ ایسے متعدد منشوروں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے جن میں سے ہر ایک کا قاعدہ ایک مثلث ہو اور ارتفاع وہی ہو جو اصلی منشور کا ہے۔

∴ کسی قائم منشور کا حجم

= (مثلثی قاعدوں کا مجموعہ) × ارتفاع

= (منشور مفروضہ کا قاعدہ) × ارتفاع

مستطیلی مجسموں اور قائم منشوروں پر مشقیں

[ایک لیٹر ایک مکعب دسی میتر کے مساوی ہوتا ہے، پانی کے ایک مکعب دسی میتر کا وزن ایک کلو گرام ہوتا ہے کسی شے کی کثافت اضافی

سے مراد وہ نسبت ہوتی ہے جو اس شے کے وزن کو شے مذکور کے مساوی الحجم پانی کے وزن کے ساتھ ہو۔

مثلاً اگر فولاد کی کثافت اضافی ۷٫۸ ہو تو اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ فولاد کے ایک مکعب دسی میتر کا وزن ۷٫۸ کلوگرام ہے]

۱۔ زمین کھودنے کی ایک مشین کے برمے کی تراش کا رقبہ ۱۳۲۵ مربع فٹ ہے اور مشین ایک دن میں ۴ فٹ نیچے جاتی ہے، بتاؤ کہ ایک دن میں کتنے مکعب گز زمین کھودی جاتی ہے

۲۔ ایک خندق کی لمبائی ۲۱٫۲۵ میتر اور چوڑائی ۱٫۵۰ میتر ہے۔ خندق کے اندر پانی ہے جس کی گہرائی ۶۴ سنتی میتر ہے، پانی کا وزن کلوگراموں میں معلوم کرو۔

۳۔ فولاد کی ایک سلاخ ۱٫۲۸ میتر لمبی، ۱۵ سنتی میتر چوڑی اور ۵ سنتی میتر موٹی ہے، فولاد کی کثافت اضافی ۷٫۸ ہے، سلاخ کا وزن دریافت کرو۔

۴۔ پتھر کے کوئلہ کی ایک ہموار تہ کی اوسط موٹائی $3\frac{1}{2}$ فٹ ہے، بتاؤ کہ اس میں سے فی ایکڑ کتنے ٹن کوئلہ دستیاب ہوتا ہے۔

[پانی کے ایک مکعب فٹ کا وزن = ۱۰۰۰ اونس

اور کوئلہ کی کثافت اضافی = ۱٫۲۸]

۵۔ ایک تالاب کی تہ اور اطراف کو پلستر کرنا منظور ہے، اگر

اخراجات فی مربع میٹر ۷ پنس ہوں اور تالاب ۵ء۲ میٹر لمبا، ۲۴ء۱ میٹر چوڑا اور ۵۰ء۱ میٹر گہرا ہو تو کل خرچ قریب ترین پنس تک معلوم کرو۔

۶۔ جست کے ۳ ملی میٹر موٹے ایک ٹکڑے کا وزن فی مربع میٹر معلوم کرو جبکہ جست کی کثافت اضافی ۱۴ء۷ ہو۔

۷۔ ایک صندوق باہر کی طرف سے ۶۵ء۱ میٹر لمبا، ۲۵ء۱ میٹر چوڑا، ۵۵ء میٹر اونچا ہے، اس کے تختوں کی موٹائی ۲۵ ملی میٹر ہے، صندوق کے اندرونی ابعاد معلوم کرو اور صندوق کے پیندے اور اطراف پر دھات چڑھانے کا صرفہ ۱ شلنگ ۳ پنس فی مربع میٹر کے حساب سے قریب ترین پنس تک معلوم کرو۔

۸۔ ایک مکعب کے ایک کنارے کا طول معلوم کرو جبکہ

(۱) اس کی سطح ۵۰ء۳۵۰ء۲ مربع میٹر ہو

(۲) اس کا حجم ۲۷۴۶۲۵ مکعب سنتی میٹر ہو

۹۔ لکڑی کا ایک بند صندوق مساوی موٹائی کے تختہ کا بنا ہوا ہے، باہر کی طرف سے یہ ۱۲ سنتی میٹر لمبا، ۱۰ سنتی میٹر چوڑا اور ۸ سنتی میٹر اونچا ہے اور اندر کی طرف سے صندوق کی سطح ۲۷۶ مربع سنتی میٹر ہے، تختہ کی موٹائی معلوم کرو۔

۱۰۔ ایک مستطیلی مجسم کی کل سطح ۱۳۳۲ مربع سنتی میٹر ہے، اگر اس کے ابعاد ۴ : ۵ : ۶ کی نسبت میں ہوں تو اس کا طول، عرض، اور بلندی معلوم کرو۔

۱۱ - ایک مستطیلی مجسم کی کل سطح ۲۱۴ مربع سنتی میتر ہے، اسکے قاعدہ میں ۴۲ مربع سنتی میتر ہیں اور اس کے ایک انتصابی رُخ میں ۳۵ مربع سنتی میتر کناروں کے طول دریافت کرو۔

۱۲ - ایک مکعب کا قطر ۱۰ سنتی میتر ہے، اس کے کنارہ کا طول قریب ترین ملی میتر تک معلوم کرو، نیز مکعب کی کل سطح اور حجم دریافت کرو۔

۱۳ - ایک مستطیلی مجسم کی بلندی ۴ سنتی میتر ہے اور اس کے قاعدہ کا رقبہ ۴۸ مربع سنتی میتر ہے، اگر اسکا قطر ۱۳ سنتی میتر ہو تو مجسم کا طول اور عرض معلوم کرو۔

۱۴ - ایک مستطیلی مجسم کا قطر ۱۷ سنتی میتر ہے اور اس کی کل سطح ۵۵۲ مربع سنتی میتر ہے، اس کے تینوں ابعاد کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۱۵ - ایک مستطیل شکل کا تالاب ہے، اس کے پیندے کے طول اور عرض بالترتیب ۲۰ فٹ اور ۱۶ فٹ ہیں، اگر تالاب میں ایک نل کے ذریعہ ۴۰ گیلن فی منٹ کے حساب سے پانی بھرا جائے تو بتاؤ کہ فی گھنٹہ کتنے انچ پانی اوپر چڑھے گا جبکہ $6\frac{1}{4}$ گیلن تقریباً ایک مکعب فٹ کے برابر محسوب کئے جائیں۔

قائم منشوروں پر

۱۶ - ایک قائم منشور کا قاعدہ ایک مثلث ا ب ج ہے جسکا زاویہ ج قائمہ ہے، اگر ا ج = ۱۵ سنتی میتر، ج ب = ۸ سنتی میتر اور منشور کی بلندی = ۱۲ سنتی میتر تو منشور کا حجم اور طرفی سطح معلوم کرو۔

۱۷۔ ایک قائم منشور کا قاعدہ ایک مثلث ہے جس کے اضلاع ۱۷ سنٹی میٹر، ۱۰ سنٹی میٹر اور ۹ سنٹی میٹر ہیں، منشور کی بلندی ۱۰ سنٹی میٹر ہے، اس کا حجم اور کل سطح معلوم کرو۔

۱۸۔ ایک قائم منشور کا قاعدہ ایک منحرف ہے جسکے متوازی اضلاع ۱۷ سنٹی میٹر اور ۱۳ سنٹی میٹر ہیں اور اُن کا درمیانی فاصلہ ۸ سنٹی میٹر ہے، اگر منشور کی بلندی ایک میٹر ہو تو اس کا حجم مکعب سنٹی میٹروں میں معلوم کرو۔

۱۹۔ ایک دیوار کے ساتھ سطح مائل کی شکل میں ریت کا ڈھیر پڑا ہے جس کی چوڑائی زمین پر ۴ فٹ ہے، سطح مائل افق کے ساتھ ۴۰° کا زاویہ بناتی ہے، ایک مکعب فٹ کے قریب ترین دسویں حصہ تک معلوم کرو کہ دیوار کی لمبائی کے ہر ایک فٹ کے مقابل کتنی ریت پڑی ہے۔

۲۰۔ ایک خندق کی عمودی تراش ایک منحرف ہے جسکا طول اوپر کے کنارہ پر ۱۵ فٹ اور پیندے پر ۹ فٹ ہے، خندق کی گہرائی ہر جگہ ۸ فٹ ہے اور اس کا طول ½ ۶۲ فٹ ہے، تقریباً کتنے گیلن اور کتنے ٹن پانی اس خندق میں آ سکتا ہے۔

(پانی کا ایک مکعب فٹ تقریباً ¼ ۶ گیلن کے مساوی ہوتا ہے اور اس کا وزن ۱۰۰۰ اونس سے تھوڑا کم ہوتا ہے)

۲۱۔ کوئلہ کی ایک ۴ ۱ فٹ موٹی تہ سطح کے ساتھ ۲۳° درجہ کا زاویہ بناتی ہے، بتاؤ کہ ایک ایکڑ سطح کے نیچے کتنے ٹن کوئلہ ہوگا۔
[کوئلہ کی موٹائی تہ پر عموداً ناپی گئی ہے، کوئلہ کا ایک ٹن ۲۸ مکعب فٹ

جگہ گھیرتا ہے اور حجم ۲۳ ~ ۰۰۹۲۰۵]

۲۲- لکڑی کے ایک نل کی عمودی تراش ایک مربع ہے جس کا ضلع ۸ سنتی میتر ہے، نل میں سے ۴۰ میتر فی منٹ کی یکساں رفتار سے پانی بہہ رہا ہے، بتاؤ کہ دس لاکھ لیتر پانی نکلنے کے لئے کتنا عرصہ درکار ہوگا۔

۲۳- ذیل کے قائم منشوروں کی طرفی سطحوں اور حجموں کا مقابلہ کرو۔

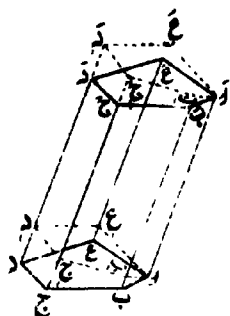
(۱) منشور کا قاعدہ ایک منتظم مسدس ہے جس کا ضلع ۸ سنتی میتر ہے، منشور کی بلندی ۶ سنتی میتر ہے۔

(۲) قاعدہ ایک منتظم مثمن ہے جس کا ضلع ۶ سنتی میتر ہے، منشور کی بلندی ۸ سنتی میتر ہے۔

۲۴- ریل کی سڑک کے لئے ۸۵۰ میتر لمبی زمین کو ۴٫۵۰ میتر کی یکساں گہرائی تک کھودنا منظور ہے، کٹائی کی چوڑائی اوپر سے ۲۱٫۲۰ میتر اور نیچے سے ۱۶٫۸۰ میتر ہونی چاہئے۔ اگر ہر روز بالاوسط ۴۵۰ ٹن مٹی کھودی جائے اور ایک مکعب میتر مٹی کا وزن $2\frac{1}{4}$ ٹن ہو تو بتاؤ کہ کام کتنے عرصہ میں ختم ہوگا؟

۱۸- مائل منشور کا حجم دریافت کرو

ذیل کی شکل میں ایک مائل منشور (اب ج د ع، اَ بَ جَ دَ عَ) دکھایا گیا ہے جس کی قائم مستوی تراش یعنی ایسی تراش جو سب طرفی کناروں پر عمود ہو اب١ ج١ د١ ع١ ہے۔

اب فرض کرو کہ اب ج د ع اور اب١ ج١ د١ ع١

کے درمیان کا ٹکڑا کاٹ کر
دوسرے سرے اَبَ جَ دَ عَ
پر اس طرح لگایا گیا ہے کہ ا ، اَ
پر آتا ہے ، ب ، بَ پر اور
علیٰ ہذا القیاس۔

اس طرح مفروضہ مائل
منشور ایک قائم منشور
(ا‌ب‌ج‌د‌ع ، اَبَ‌جَ‌دَ‌عَ)
بن جاتا ہے جس کے کنارے دئے ہوئے منشور کے کناروں کے
برابر ہیں اور جس کا حجم = سرے ا‌ب‌ج‌د‌ع کا رقبہ × ا اَ
اس لئے مائل منشور کا رقبہ

= اس کی عمودی تراش کا رقبہ × کنارہ ...... (۱)

اب فرض کرو کہ قاعدہ ا ب ج د ع اور عمودی تراش
ا ب ج د ع کے درمیان زاویہ ط بنتا ہے ، تب عمودی
بلندی ف اور کنارہ ا اَ کا درمیانی زاویہ بھی ط ہوگا۔ کیونکہ
یہ دونوں خطوط بالترتیب قاعدہ اور تراش کی سطوح مستوی
پر عماد ہیں۔

لہذا عمودی تراش ا ب ج د ع = قاعدہ ا ب ج د ع × جم ط
[دفعہ ۲]
نیز ف = ا اَ جم ط
(۱) میں یہ قیمتیں مندرج کرنے سے
مائل منشور کا حجم = قاعدہ ا ب ج د ع × جم ط × ا اَ

= قاعدہ اب ج د ع × ف

پس مائل منشوروں کی صورت میں بھی قائم منشوروں کی مانند

حجم = (قاعدہ کا رقبہ) × (عمودی ارتفاع)

ثابت کرو کہ ایک مائل منشور کی طرفی سطح

= عمودی تراش کا محیط × کنارہ

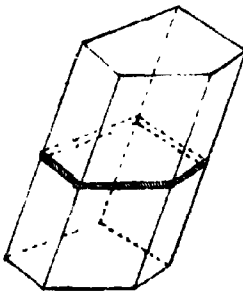
اس کا ثبوت طالب علم کے لئے مشق کے طور پر چھوڑا جاتا ہے

۱۹ ۔ مائل منشور کا حجم (متبادل ثبوت)

قاعدہ کے متوازی سطوح مستوی کے ایک سلسلہ سے منشور کو مساوی فاصلوں پر کاٹ کر چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کرو اور کسی دو متصل سطحوں کے درمیان نیچے کی سطح پر ایک قائم منشور بناؤ تب اس قسم کی منشوری قاش کا حجم

= (اس کے قاعدہ کا رقبہ) موٹائی۔

اب اگر ان قاشوں کی تعداد کو لا انتہا بڑھا دیا جائے اور بنا برین ہر قاش کی موٹائی کو نہایت چھوٹا کر دیا جائے تو انتہائی صورت میں کل منشور کا حجم ان لا انتہا پتلی قاشوں کے مجموعی حجم کے مساوی ہوگا۔

لیکن چونکہ ہر قاش کا قاعدہ منشور کے قاعدہ کے مساوی

ہے اور ان سب کی موٹائی کا حاصل جمع عمودی بلندی کے برابر ہے۔ اس لئے منشور کا حجم = قاعدہ کا رقبہ × عمودی ارتفاع

فرع۔ وہ منشور جن کے قاعدوں کے رقبے مساوی ہوں اور عمودی ارتفاع برابر ہوں اُن کے حجم بھی برابر ہوتے ہیں

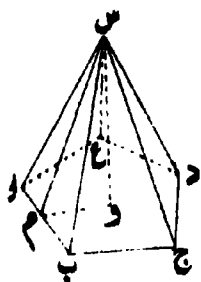
نوٹ۔ اوپر کا ثبوت متوازی السطوح مجسموں کے لئے بھی درست ہوگا کیونکہ متوازی السطوح منشور کی ایک خاص صورت ہے، نفس ثبوت اس امر پر مبنی ہے کہ قاعدہ کے متوازی سب مستوی تراشیں ہر طرح سے ایک دوسرے کے مساوی ہوتی ہیں۔

مخروطِ مضلع

۲۰۔ ایک مخروطِ مضلع (س، ا ب ج د ء) کی مائل سطح سب مثلثی رخوں س ا ب، س ب ج، س ج د، ..... کے حاصل جمع کے برابر ہوتی ہے اور عام صورت میں ہر مثلث کا رقبہ الگ الگ معلوم کرنا چاہیئے۔

لیکن اگر مخروطِ مضلع قائم ہو اور اس کا قاعدہ کوئی منتظم شکل ہو تو اس کی سطح مائل کے لئے ایک سادہ جملہ حاصل ہوسکتا ہے۔

۲۱۔ ایک قائم مخروطِ مضلع کا قاعدہ ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع ہے اس کی مائل سطح معلوم کرو۔

چونکہ مخروطِ مضلع قائم ہے اور اس کا قاعدہ منتظم ہے اس لئے اس کے مائل کنارے س ا، س ب، س ج

سب مساوی ہیں اور نیز رُخ
س ا ب، س ب ج،
س ج د،... متساوی الساقین
مثلث ہیں جو ایک دوسرے
کے ہر طرح سے برابر ہیں۔

اگر راس س سے قاعدہ
کے ایک ضلع پر عمود س م
کھینچا جائے جو صریحاً اس
ضلع کی تنصیف کریگا تو اس عمود
کو مخروطِ مضلع کا مائل ارتفاع کہتے ہیں اور اس کی قیمت ہر مائل
پہلو کی صورت میں وہی ہوتی ہے۔

اگر س سے قاعدہ پر عمود س و نکالا جائے تو فرع مسئلہ
۱۵ کے بموجب و م، ا ب پر عمود ہوگا۔

فرض کرو کہ قاعدہ کا ہر ضلع = ا، عمودی ارتفاع س و = ف
اور مائل ارتفاع س م = ل، تو مخروطِ مضلع کی سطح مائل

= △ س ا ب × ن

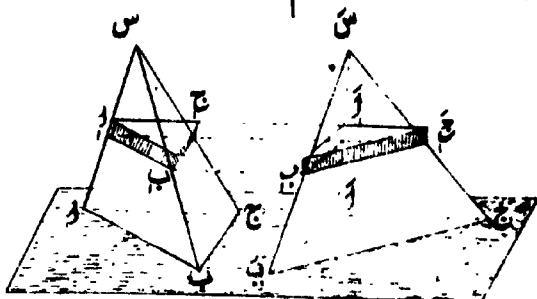
= $\frac{1}{2}$ ا ب × س م × ن

= $\frac{1}{2}$ ن ا × ل رقبہ کی اکائیاں

= $\frac{1}{2}$(قاعدہ کا محیط) × (مائل ارتفاع)

کل سطح = سطح مائل + قاعدہ کا رقبہ

۲۲ — ثابت کرو کہ اگر دو مضلع مخروطوں (س، ا ب ج)

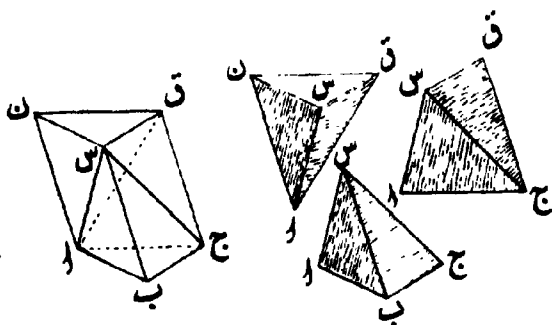
اور (سَ، اَبَ جَ) کے قاعدوں کے رقبے اور ارتفاع مساوی ہوں تو اُن کے حجم بھی مساوی ہوتے ہیں۔

دونوں مجسموں کو اس طرح رکھو کہ ان کے قاعدے ا ب ج اور اَ بَ جَ ایک ہی سطح مستوی میں ہوں اور اُن کو قاعدوں کے متوازی مساوی فاصلوں پر مستوی سطحوں کے ایک سلسلہ سے قطع کرو دو متصل مستوی سطحوں کے ہر زوج کے درمیان نیچے کی سطح کی تراش پر ایسے منشور بناؤ جن کے طرفی کنارے س اُ، سَ اُ کے بالترتیب متوازی ہوں۔

تب جو تراشیں دونوں مجسموں پر ایک ہی سطح مستوی کے تقاطع سے حاصل ہوں گی مثلاً ا ب ج، اَ بَ جَ، ان کے رقبے بموجب فرع دفعہ ۱۴۳ باہم مساوی ہونگے۔

لہٰذا اِن تراشوں پر جو چھوٹے منشور بنائے گئے ہیں ان کے حجم بھی مساوی ہونگے کیونکہ ان کی موٹائیاں برابر ہیں اب اگر ان متوازی تراشوں کی تعداد کو لاانتہا بڑھا دیا

جائے اور بنا برین ان چھوٹے منشوروں یا قاشوں کی موٹائی کو لا انتہا کم کردیا جائے تو دونوں مجسم اپنی قاشوں کے مجموعی حجم کے مساوی ہونگے اور چونکہ ایک مجسم کی کوئی قاش دوسرے مجسم کی تناظر قاش کے مساوی ہے اس لئے کل مجسم بھی بلحاظ حجم کے ایک دوسرے کے مساوی ہونگے۔

نوٹ ۔ اختصار کی غرض سے صرف مثلثی منشوروں پر بحث کی گئی ہے لیکن سلک استدلال ہر حالت میں یہی ہوگی۔

۲۳۔ ایک مثلثی مخروط مضلع کا حجم معلوم کرو۔

فرض کرو کہ مثلثی مخروطِ مضلع (س، ا ب ج) ہے جس کا عمودی ارتفاع ف ہے۔

ا اور ج میں سے ب س کے متوازی خطوط کھینچو اور ان خطوں کو قاعدہ ا ب ج کے متوازی، س میں سے گذرنے والی سطح مستوی سے قطع کرو، اس طرح ایک مثلثی منشور بنجائیگا جسکا حجم = △ا ب ج × ف

متوازی الاضلاع ا ج ق ن کا قطر ا ق کھینچو۔

اب یہ منشور ایک مخروطِ مضلع (س، ا ب ج) میں جس کا قاعدہ مثلث ا ب ج ہے اور مخروط مضلع (س، ا ج ق ن) میں جسکا قاعدہ متوازی الاضلاع ا ج ق ن ہے منقسم ہوسکتا ہے۔ نیز موخرالذکر مخروطِ مضلع پھر دو مضلع مخروطوں (س، ا ن ق) اور (س، ا ج ق) میں تقسیم ہوسکتا ہے جن کے حجم باہم مساوی ہیں کیونکہ ان دونوں کے قاعدے برابر ہیں اور ان کا رأس س دونوں میں مشترک ہے۔

نیز مخروطِ مضلع (س، ا ن ق) کو (ا، ن س ق) سے بھی تعبیر کیا جاسکتا ہے۔

پس مخروطِ مضلع (ا، ن س ق) = مخروط مضلع (س، ا ب ج) کیونکہ ایک مجسم کا قاعدہ ن س ق دوسرے مجسم کے قاعدہ ا ب ج کے برابر ہے اور دونوں کے ارتفاع بھی مساوی ہیں۔ لہذا منشور مساوی حجموں والے تین مضلع مخروطوں میں تقسیم ہوجاتا ہے۔

∴ مخروطِ مضلع (س، ا ب ج) = $\frac{1}{3}$ (منشور کا حجم)

= $\frac{1}{3}$ (قاعدہ کا رقبہ) × (عمودی ارتفاع)

فرع۔ اگر کسی مضلع مخروط کا قاعدہ ایک کثیر الاضلاع ہو تو اس کو مثلثی قاعدہ والے متعدد مضلع مخروطوں میں منقسم کرسکتے ہیں جن میں سے ہر مضلع مخروط کا ارتفاع اصلی مخروطِ مضلع کے ارتفاع کے برابر ہوتا ہے۔

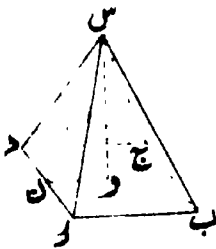
کسی قاعدہ پر کے مخروطِ مضلع کا حجم

$= \frac{1}{3}$ (قاعدہ کا رقبہ) × (عمودی ارتفاع)

مشقیں

۱۔ ایک قائم مخروطِ مضلع کی بلندی ۱۵ سنتی میٹر ہے اور اس کا قاعدہ ایک مربع ہے جس کا ہر ضلع ۱۶ سنتی میٹر ہے۔ مخروطِ مضلع کی (۱) سطح مائل اور (۲) حجم معلوم کرو۔

یہاں وس = ۱۵ سنتی میٹر

اب = اد = ۱۶ سنتی میٹر

ون = $\frac{1}{2}$ اب = ۸ سنتی میٹر

△ س و ن میں جس کا زاویہ س و ن قائمہ ہے

س ن^2 = و س^2 + و ن^2 = ۱۵^2 + ۸^2 = ۲۸۹

∴ س ن = $\sqrt{۲۸۹}$ = ۱۷ سنتی میٹر

رخ س د ا کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ ا د × س ن

= $\frac{1}{2}$ (۱۶ × ۱۷) مربع سنتی میٹر = ۱۳۶ مربع سنتی میٹر

پس سطح مائل = △ س د ا × ۴ = ۵۴۴ مربع سنتی میٹر

اور حجم = $\frac{1}{3}$ (قاعدہ کا رقبہ) × ارتفاع

= $\frac{1}{3}$ (۱۶ × ۱۶ × ۱۵) مکعب سنتی میتر

= ۱۲۸۰ مکعب سنتی میتر

۲۔ ایک قائم مخروطِ مضلع کا ارتفاع ۷ انچ ہے اور اس کا قاعدہ ۶ انچ کے ضلع پر ایک مربع ہے، مخروطِ مضلع کی سطح مائل اور حجم ایک مربع انچ کے قریب ترین سوویں حصہ تک معلوم کرو۔

۳۔ ذیل کے مضلع مخروطوں کے حجم دریافت کرو

(۱) مخروطِ مضلع کا قاعدہ ایک مستطیل ہے جس کے اضلاع ۱۱ سنتی میتر اور ۷ سنتی میتر ہیں اور مخروط کا ارتفاع ۱۲ سنتی میتر ہے۔

(۲) مخروط مضلع کا قاعدہ ایک مثلث ہے جس کے اضلاع ۱۵ سنتی میتر، ۱۴ سنتی میتر اور ۱۳ سنتی میتر ہیں اور بلندی ۱۰ سنتی میتر ہے۔

۴۔ ایک قائم مضلع مخروط کا قاعدہ ۸ انچ کے ضلع پر ایک مربع ہے اور اسکا ارتفاع ۹ انچ ہے، ایک انچ کے قریب ترین سوویں حصہ تک مخروط مضلع کا

(۱) مائل ارتفاع اور (۲) مائل کنارہ معلوم کرو۔

۵۔ ایک ایسے مخروطِ مضلع کی (۱) سطح مائل اور (۲) حجم دریافت کرو جس کا قاعدہ اور ارتفاع اُس مکعب کے قاعدہ اور ارتفاع کے برابر ہوں جو ۱۰ سنتی میتر کے کنارہ پر بنایا جائے۔

۶۔ ایک قائم مخروطِ مضلع کا قاعدہ ایک مستطیل ہے جس کے اضلاع ۲۴ سنتی میتر اور ۱۸ سنتی میتر ہیں اور ہر مائل کنارہ ۱۷ سنتی میتر ہے، مخروط مضلع کا حجم اور ارتفاع معلوم کرو۔

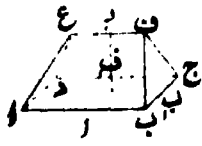
۷ ۔ ایک قائم مخروطِ مضلع کا قاعدہ ایک مربع ہے جس کا ہر ضلع ۴٫۱۱ انچ ہے اور ارتفاع ۴٫۲۲ انچ۔

(۱) اُس دو سطحی زاویہ کی جیب التمام دریافت کرو جو ہر پہلو اور قاعدہ کے درمیان بنتا ہے نیز (۲) قاعدہ پر ہر پہلو کا جو ظل ہے اسکا رقبہ دریافت کرو۔

۸ ۔ ایک قائم مخروطِ مضلع کا قاعدہ ایک متساوی الاضلاع مثلث ہے جس کا ہر ضلع ۱۰ سنتی میٹر ہے، مخروط کا ارتفاع ۵ سنتی میٹر ہے اسکے (۱) مائل ارتفاع (۲) ایک پہلو کا رقبہ (۳) اور پہلو اور قاعدہ کے دو سطحی زاویہ کی جیب التمام کو دریافت کرو

ایک مستوی زاویہ بناؤ جس کی جیب التمام یہی ہو اور اس کی پیمائش زاویہ کش سے کرو۔

۹ ۔ ایک مخروطِ مضلع کا حجم ۲۷۰ مکعب سنتی میٹر ہے اور اس کا قاعدہ ایک منتظم مسدس ہے جس کا ہر ضلع ۶ سنتی میٹر ہے، مخروطِ مضلع کا ارتفاع قریب ترین ملی میٹر تک معلوم کرو۔

۱۰ ۔ جس مجسم کی تصویر ساتھ میں دی گئی ہے اس کو فانہ کہتے ہیں اس کا قاعدہ ایک مستطیل ہے جسکا طول ل اور عرض ب ہے اور اس کے سرے دو مثلث ع ا د اور ف ب ج ہیں۔

باقی کے رخ ا ع ف ب اور د ع ف ج دو منحرف ہیں جن میں ضلع ع ف مشترک ہے اور اسلئے یہ قاعدہ کے دو ضلعوں کے متوازی

ہے، اس ضلع کو دھار بھی کہتے ہیں۔

اگر دھار ع ف = $د_1$ اور ارتفاع = $ف_1$، تو ثابت کرو کہ

$$\text{فانہ کا حجم} = \frac{ف_1 ب_1}{6}\{2ا_1 + د_1\}$$

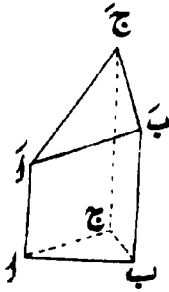
[ع اور ف میں سے گزرنے والی مستوی سطحیں کھینچو جو قاعدہ پر عمود ہوں، اس طرح سے فانہ ایک منشور اور دو مضلع مخروطوں میں تقسیم ہو جائیگا۔

دو مضلع مخروطوں کو ملانے سے ایک مخروط مضلع بن جاتا ہے، اسکا قاعدہ ایک مستطیل ہوگا جس کا طول $ا_1 - د_1$ اور عرض $ب_1$ ہوگا۔ نیز منشور کے سرے انتصابی تراشیں ہیں جن میں سے ہر تراش کا رقبہ = $\frac{1}{2}ب_1 ف_1$ اور منشور کا طول $د_1$ ہے، ان امور کا لحاظ رکھتے ہوئے فانہ کا حجم آسانی سے محسوب کیا جاسکتا ہے]

۱۱۔ اگر مشق ماقبل میں فانہ کے مثلثی رخ قاعدہ کے ساتھ مساوی زاوئے بنائیں تو ثابت کرو کہ مائل سطح، ضابطہ

$$\frac{1}{2}(ا_1 + د_1)\sqrt{4ف_1^2 + ب_1^2} + ب_1\sqrt{4ف_1^2 + (ا_1 - د_1)^2}$$

سے حاصل ہوسکتی ہے

۱۲۔ ساتھ کی تصویر ایک منشور ناقص کو تعبیر کرتی ہے، منشور ناقص وہ مجسم ہے جو ایک قائم مثلثی منشور کو سطح مستوی ا ب ج سے قطع کرنے سے حاصل ہوتا ہے جبکہ یہ سطح مستوی قاعدہ ا ب ج کے متوازی نہ ہو۔

اگر طرفی کناروں ا اَ، ب بَ، ج جَ کے طول ا، ب، ج ہوں تو ثابت کرو کہ منشور ناقص کا حجم

= قاعدہ کا رقبہ × ⅓ (ا + ب + ج)

[منشور ناقص کو ایک ایسی سطح مستوی سے قطع کرو جو قاعدہ کے متوازی ہو اور طرفی کناروں میں سے سب سے چھوٹے کے ایک سرے اَ میں سے گزرے اور اس طرح مفروضہ منشور کو ایک قائم منشور اور ایک مخروط مطبلع میں تقسیم کرو]

۱۳ ـــ (یولر کا مسئلہ) اگر کسی کثیر السطوح میں رخوں، کناروں اور راسوں کی تعداد کو بالترتیب خ، ک، ر سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ ک + ۲ = خ + ر

فرض کرو کہ کثیر السطوح ن رخوں کو یکے بعد دیگرے جوڑنے سے بنایا گیا ہے۔

اگر رخ صرف ایک ہو تو راسوں اور کناروں کی تعداد مساوی ہوگی اس صورت میں ک = ر

دوسرا رخ شامل کرنے سے پہلے رخ کے ساتھ ایک کنارہ اور دو راس مشترک ہو جاتے ہیں، یعنی نئے کناروں کی تعداد نئے راسوں کی تعداد سے بقدر ایک کے زیادہ ہوتی ہے۔

∴ ک = ر + ۱

تیسرا رخ پہلے رخوں کے ساتھ تین راس اور دو کنارے مشترک رکھتا ہے اور حسب سابق نئے کناروں کی تعداد نئے راسوں کی

تعداد سے بقدر ایک کے زیادہ ہوتی ہے -

∴ ک = ر + ۲

اسی طرح بتدریج ایک ایک رخ بڑھاتے جانے سے جب ن-۱ رخ لگائے جائینگے تو ک = ر + ن - ۲

آخری رخ کا اضافہ کرنے سے کسی نئے کنارے یا راس کا اضافہ نہیں ہوتا اور ن اور خ برابر ہو جاتے ہیں -

∴ ک = ر + خ - ۲

یا ک + ۲ = ر + خ

۲۴ - منتظم کثیر السطوح زیادہ سے زیادہ پانچ ہو سکتے ہیں - ایک مجسم زاویہ بنانے کے لئے کم از کم تین مستوی زاویوں کی ضرورت ہوتی ہے اور مسئلہ ۲۰ کی رو سے ان مستوی زاویوں کا مجموعہ ۳۶۰° سے کم ہوتا ہے ، اگر کثیر السطوح منتظم ہو اور بنا برین ہر مجسم زاویہ کے احاطہ کرنے والے مستوی زاوئے سب باہم مساوی ہوں تو اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ہر زاویہ ۱۲۰° سے لازماً کم ہوگا یعنی رخ یا تو متساوی الاضلاع مثلث ہونگے ، یا مربعے یا منتظم مخمس ، کیونکہ منتظم مسدس کا زاویہ ۱۲۰° ہوتا ہے اور چھ سے زیادہ اضلاع کے کثیر الاضلاع کا زاویہ ۱۲۰° سے بڑا ہوتا ہے -

فرض کرو کہ کسی رخ کے زاویئیں درجوں کی تعداد کو د سے تعبیر کیا جاتا ہے ، اگر رخ متساوی الاضلاع مثلث ہوں تو د = ۶۰°

تب (۱) ۳ د = ۱۸۰° ، (۲) ۴ د = ۲۴۰° ، (۳) ۵ د = ۳۰۰°
[۶ د = ۳۶۰°]

پس تین، چار یا پانچ متساوی الاضلاع مثلثوں کو جوڑنے سے ایک منتظم کثیر السطوح کا ایک مجسم زاویہ بن سکتا ہے، پانچ سے زیادہ مثلثوں سے مجسم زاویہ نہیں بنے گا۔

اگر رخ مربعے ہوں تو د = ۹۰°

تب (۴) ۳ د = ۲۷۰° [۴ د = ۳۶۰°]

اس صورت میں تین اور صرف تین مربعے استعمال کئے جا سکتے ہیں۔

اگر رخ منتظم مخمس ہوں تو د = ۱۰۸°

تب (۵) ۳ د = ۳۲۴° [۴ د = ۴۳۲°]

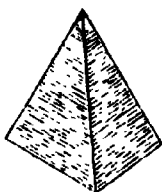
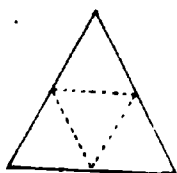
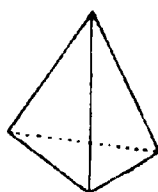
اس صورت میں تین اور صرف تین منتظم مخمس استعمال کئے جا سکتے ہیں۔

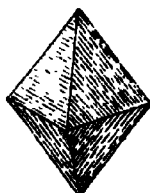
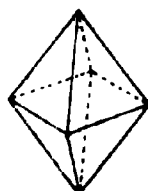
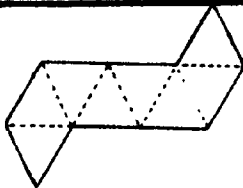
پس پانچ اور صرف پانچ منتظم کثیر السطوح بن سکتے ہیں۔

۲۵ ۔ اگر ان منتظم کثیر السطوح مجسموں میں سے کسی ایک کے سب رخوں کو جو اس کی سطح پر مشتمل ہوں کھول کر ایک سطح مستوی پر بچھائیں تو ہمیں ایک مستوی شکل حاصل ہوگی جو مختلف صورتوں میں متساوی الاضلاع مثلثوں، مربعوں اور منتظم مخمسوں سے بنی ہوئی ہوگی، ایسی مستوی شکل کو اسکے کثیر السطوح کا ڈھانچہ کہتے ہیں۔

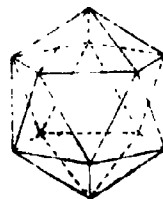
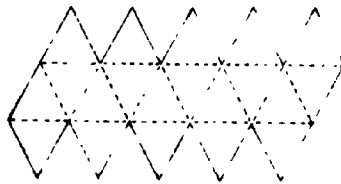
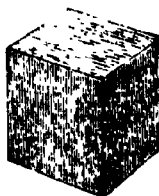
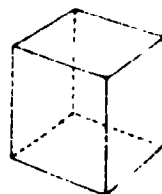
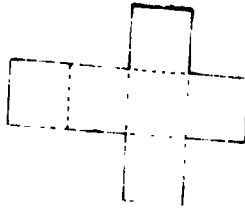
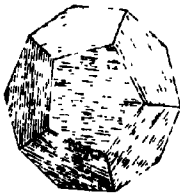
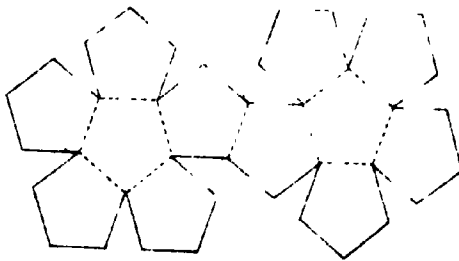
منتظم کثیر السطوح اور ان کے ڈھانچوں کی تصویریں چھوٹے پیمانہ پر صفحات ۱۰۰ تا ۱۰۲ میں دکھائی گئی ہیں۔

منتظم کثیر السطوح

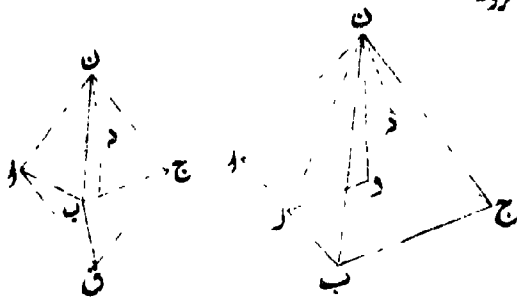
(۱) وہ کثیر السطوح جس کا ہر ایک مجسم زاویہ تین متساوی الاضلاع مثلثوں کے مستوی زاویوں سے بنا ہوا ہو اس کو منتظم ذوارلعبۃ السطوح (یا چہار سطحی) کہتے ہیں۔

۴ رخ
۴ راس
۶ کنارے

منتظم ذوارلعبۃ السطوح کا ڈھانچہ چار متساوی الاضلاع مثلثوں پر مشتمل ہوتا ہے جیسا کہ ساتھ کی شکل میں دکھایا گیا ہے۔

(۲) وہ کثیر السطوح جس کا ہر مجسم زاویہ چار متساوی الاضلاع مثلثوں کے زاویوں سے بنا ہو اس کو ہشت سطحی کہتے ہیں

۸ رخ
۶ راس
۱۲ کنارے

ایک منتظم ہشت سطحی کا ڈھانچہ
۸ متساوی الاضلاع مثلثوں
پر مشتمل ہوتا ہے۔

(۳) وہ کثیر السطوح جس کا ہر مجسم زاویہ پانچ متساوی الاضلاع مثلثوں کے زاویوں سے بنا ہو بست سطحی کہلاتا ہے

۲۰ رخ
۱۲ راس
۳۰ کنارے

منتظم بست سطحی کا خاکہ ۲۰ مساوی متساوی الاضلاع مثلثوں پر مشتمل ہوتا ہے

(۴) وہ منتظم کثیر السطوح جس کا ہر مجسم زاویہ تین مربعوں کے زاویوں سے بنا ہو مکعب کہلاتا ہے۔

۶ رخ
۸ راس
۱۲ کنارے

ایک مکعب کا ڈھانچہ ۶ مساوی مربعوں پر مشتمل ہوتا ہے۔

(ہ) وہ کثیر السطوح جس کا ہر مجسم زاویہ تین منتظم مخمسوں کے زاویوں سے بنا ہُوا ہو دوازدہ (بارہ) سطحی کہلاتا ہے۔

ایک منتظم دوازدہ سطحی کا ڈھانچہ ۱۲ مساوی منتظم مخمسوں پر مشتمل ہوتا ہے

منتظم کثیر السطوح مجسموں کے نمونے حسب ذیل طریقہ سے تیار کئے جاسکتے ہیں

سب سے پہلے مجسم کا ڈھانچہ کاغذ کے ایک موٹے تختہ پر کھینچو۔ پھر اس ڈھانچہ کو باہر کے خطوں پر پورے طور سے کاٹو اور اندرونی خطوں پر بھی اطراف سے تھوڑا سا کاٹ لو۔ پھر رخوں کو اس طرح شکن دینے سے کہ کنارے ایک دوسرے کے ساتھ مل جائیں مجسم مطلوب تیار ہو جاتا ہے اور کناروں کو اس مقام پر رکھنے کے لئے گوند سے چپکا دیا جاتا ہے۔

مشق ۔ ایک منتظم ہشت سطحی کا ہر کنارہ ۲ م ہے (۱) اس کے قطر کا طول (۲) اس کی سطح (۳) اس کا دو سطحی زاویہ (۴) اور حجم دریافت کرو۔

شکل سے ظاہر ہے کہ ایک منتظم ہشت سطحی دو مضلع مخروطوں پر مشتمل ہوتا ہے جو مربع قاعدہ ا ب ج د کی دونوں جانب واقع ہوتے ہیں۔ ان مضلع مخروطوں میں سے ایک، بڑے پیمانے پر دائیں جانب دکھایا گیا ہے۔ ن و نقطہ ن سے قاعدہ پر عمود ہے اور و مربع ا ب ج د کا وسطی نقطہ ہے۔ ن ر، ا ب کا عمودی منصِّف ہے۔

اب ا ب = ۲ م، ∴ ر ب = م، ر و = م

ن ر = ر ب مس ۶۰° = م $\sqrt{3}$

قائم الزاویہ مثلث ن و ر سے

ون² = ن ر² - ور² = ۳م² - م² = ۲م²

∴ ون = م √۲

پس (۱) ہشت سطحی کا قطر = ۲ ون = ۲ م √۲

(۲) سطح = ۸ × △ ن اب = ۸ × رن × رب

= ۸ × م √۳ × م = ۸ م² √۳

(۳) حجم = ۲ × (اُس مخروطِ مضلع کا حجم جس کا راس ن ہے)

= ۲ × ⅓ × ون × قاعدہ کا رقبہ

= ۲ × ⅓ م √۲ × (۲م)² = ۸م³ √۲ / ۳

اور (۴) دوسطحی زاویہ = ۲ × زاویہ ن ر و

اب مس ن ر و = ن و / و ر = م √۲ / م = √۲ = ۱٫۴۱۴۲.....

اس سے بذریعہ جداولِ مماس معلوم ہو سکتا ہے کہ

∠ ن ر و = ۵۴° ۴۴′ تقریباً

پس دوسطحی زاویہ = ۱۰۹° ۲۸′ تقریباً

کثیرالسطوح مجسموں پر متفرق مثالیں

۱۔ پیمائش سے معلوم ہوا کہ ایک مستطیلی مجسم کے ابعاد ۸٫۵ سنتی میٹر، ۴٫۷ سنتی میٹر اور ۶ سنتی میٹر ہیں۔ اس کا حجم دریافت کرو۔

اگر مندرجہ بالا ابعاد میں سے ہر ایک کی قیمتیں از روئے پیمائش اصلی ابعاد سے بقدر ایک ملی میٹر کے زیادہ یا کم ہوں تو کل

یا بیشی کے لحاظ سے زیادہ سے زیادہ غلطی جو جواب میں ہو سکتی ہے
اسے معلوم کرو۔ نیز دریافت کرو کہ یہ غلطیاں دونوں صورتوں میں
مفروضہ حجموں کا کتنے فیصدی ہونگی۔

۲۔ لکڑی کے ۱۵ انچ چوڑے تختہ کا ایک سرا ۸ فٹ اونچی
دیوار کے اوپر کے کنارے کے ساتھ لگا یا گیا ہے اور تختہ کا
دوسرا سرا زمین پر دیوار سے ۶ فٹ کے فاصلہ پر ہے، اگر تختہ
کی موٹائی ۱½ انچ ہو اور ایک مکعب فٹ لکڑی کا وزن ۵۶ پونڈ
ہو تو تختہ کا وزن دریافت کرو۔

۳۔ ایک مثلث متساوی الاضلاع ا ب ج کا ہر ضلع ۱۰ سنتی میتر
ہے، مثلث کا ظل ایک ایسی سطح مستوی پر بنایا گیا ہے جو ا ب
میں سے گزرتی ہے، اگر سطح مستوی پر کے ظل کا رقبہ ۳۴٫۶۴
مربع سنتی میتر ہو تو دونوں مستوی سطحوں کا درمیانی زاویہ معلوم کرو
[دو سطحی زاویہ کی جیب التمام محسوب کرو اور اس کے بعد جدولیں
استعمال کرو یا اس کے متناظر مستوی زاویہ کی پیمائش کرو۔ جا ۳ = ۱۱٬۶۳۲۰۰]

۴۔ ایک قائم مخروطِ مضلع کا ارتفاع ۸ سنتی میتر ہے اور اس کا
قاعدہ ۴ سنتی میتر کے ضلع پر ایک منتظم مسدس ہے (۱) ایک مربع
سنتی میتر کے قریب ترین دسویں حصہ تک اس کی مائل سطح معلوم
کرو اور (۲) ایک مکعب سنتی میتر کے قریب ترین دسویں حصہ
تک اس کا حجم دریافت کرو۔

۵۔ ایک قائم مخروطِ مضلع کا قاعدہ ایک مربع ہے جس کا ہر
ضلع ۶ سنتی میتر ہے اور اس کے مائل رخ متساوی الاضلاع مثلث

ہیں ۔ مخروطِ مضلع کا ڈھانچہ کھینچو اور اس کے حجم اور ارتفاع کی تقریبی قیمتیں معلوم کرو۔

۶ ۔ ایک قائم مخروطِ مضلع کے قاعدہ کے کونے نقاط (۹، ۵، ۰)، (-۹، ۵، ۰)، (۹، -۵، ۰)، (-۹، -۵، ۰) ہیں اور اس کا راس نقطہ (۰، ۰، ۱۲) پر ہے اس کی سطح مائل محسوب کرو ۔

دیکھو صفحہ (۶۰ ــــ ۶۲)

۷ ۔ ایک قائم مخروطِ مضلع کا قاعدہ ایک منتظم مسدس ہے جس کا ہر ضلع ۵ سنتی میٹر ہے اور اس کے مائل پہلو قاعدہ کے ساتھ ۶۰° کا زاویہ بناتے ہیں، اس کا حجم دریافت کرو ۔

۸ ۔ اگر ایک منتظم ذو اربعۃ السطوح کے راس سے اس کے قاعدہ پر عمود نکالا جائے تو ثابت کرو کہ عمود کا پایہ قاعدہ کے ہر ایک وسطیہ کو نسبت ۲:۱ میں تقسیم کرتا ہے ۔

۹ ۔ ثابت کرو کہ اگر ایک منتظم ذو اربعۃ السطوح کے ایک کونہ سے مقابل کے رخ پر عمود نکالا جائے اور پھر اس عمود کے پائیں سے ایک اور عمود کسی دوسرے رُخ پر نکالا جائے تو پہلا عمود دوسرے عمود کا تین گنا ہوگا۔

۱۰ ۔ ایک منتظم ذو اربعۃ السطوح کے ایک کونے سے مقابل کے رُخ پر عمود نکالا گیا ہے، اگر اس عمود کو ع سے تعبیر کیا جائے اور مجسم مذکور کا ہر ایک کنارہ ۲ م ہو تو ثابت کرو کہ

$$۳ ع^۲ = ۸ م^۲$$

۱۱ ۔ ایک منتظم ذو اربعۃ السطوح کا ہر کنارہ ۲ م ہے، ثابت کرو کہ

کل سطح $= ۴ م^۲ \sqrt{۳}$ اور حجم $= \frac{۲}{۳} م^۳ \sqrt{۲}$

۱۲ — ایک منتظم ذوار بعتہ السطوح کی کسی دو متصل رخوں کے درمیان جو دوسطحی زاویہ بنتا ہے اس کی تقریبی قیمت معلوم کرو۔

۱۳ — ثابت کرو کہ ایک متوازی السطوح کے چار قطروں پر جو مربعے بنتے ہیں اُن کا مجموعہ اُن مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہے جو اسکے بارہ کناروں پر بنائے جائیں۔

(۲) ایک ذوار بعتہ السطوح کے سب کناروں کے مربعوں کا مجموعہ اُن مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہے جو مقابل کے کناروں کے وسطی نقاط کو ملانے والے پر بنائے جائیں۔

۱۴ — ثابت کرو کہ اگر ایک ذوار بعتہ السطوح کے دو رخوں کے خط تقاطع میں سے ایک ایسی سطح مستوی کھینچی جائے جو ان رخوں کے دوسطحی زاویہ کی تنصیف کرے تو یہ سطح مستوی مقابل کے کنارہ کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرے گی جن کی نسبت مذکورہ رخوں کے رقبوں کی نسبت کے برابر ہو گی۔

۱۵ — اگر ایک مکعب کے ایک نقطہ میں سے گزرنے والے کنارے و ا، و ب، و ج ہوں اور ہر ایک کا طول اِ ہو تو ثابت کرو کہ

(۱) مخروطِ مضلع (و، ا ب ج) کا حجم $= \frac{۱}{۶}$ اِ^{۳}

(۲) مثلث ا ب ج کا رقبہ $= \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ اِ^{۲}

(۳) نقطہ و سے سطح ا ب ج پر کا عمود $= \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ اِ

۱۶۔ فضا میں تین مستقیم خط و ا، و ب، و ج ہیں، ان میں سے ہر ایک باقی دو پر عمود ہے، اگر ان خطوں کے طول بالترتیب $ا_1$، $ب_1$، $ج_1$ ہوں تو ثابت کرو کہ

(۱) مخروطِ مضلع (و، ا ب ج) کا حجم $= \frac{1}{6} ا_1 ب_1 ج_1$

(۲) مثلث ا ب ج کا رقبہ $= \frac{1}{2}\sqrt{ا_1^2 ب_1^2 + ب_1^2 ج_1^2 + ج_1^2 ا_1^2}$

(۳) نقطہ و سے سطح مستوی ا ب ج پر کا عمود

$$= ا_1 ب_1 ج_1 \Big/ \sqrt{ا_1^2 ب_1^2 + ب_1^2 ج_1^2 + ج_1^2 ا_1^2}$$

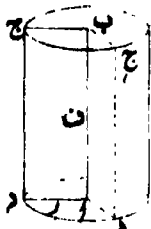
۱۷۔ بتاؤ کہ ایک مکعب کو ایک مستوی سے کس طرح کاٹا جائے کہ خطوطِ تقاطع سے ایک منتظم مسدس بنے۔

۱۸۔ ایک قائم مخروطِ مضلع کا قاعدہ ایک مربع ہے جس کا ہر ضلع $ا_1$ انچ ہے اور ارتفاع ف انچ ہے، مضلع کے اندر ایسا بڑے سے بڑا مکعب بنایا گیا ہے جس کا ایک رخ مخروطِ مضلع کے قاعدہ کی سطح مستوی میں واقع ہے، ثابت کرو کہ مکعب کا ہر کنارہ

$$= ا_1 ف \Big/ (ا_1 + ف)$$

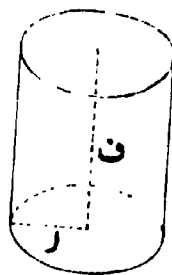
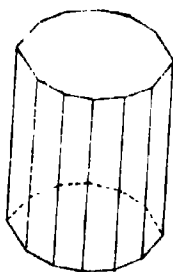
گردشی مجسمات

اسطوانہ

۲۶ - **تعریف۔ قائم مستدیر اسطوانہ** ایک ایسا مُجَسَّم ہے جو ایک مستطیل کو اُس کے ایک ضلع کے گرد پھرانے سے حاصل ہوتا ہے جبکہ اس ضلع کو بطور محور کے ثابت رکھا جائے۔

پس اگر مستطیل ا ب ج د محور ا ب کے گرد گھومے تو مقابل کے ضلع ج د کے گھومنے سے اسطوانہ کی منحنی سطح پیدا ہوگی (ملاحظہ ہو ساتھ کی شکل) ضلع ج د کو جو ہمیشہ اثناء گردش میں محور کے متوازی رہتا ہے سطح کا **تکوینی خط** کہتے ہیں چونکہ اضلاع ا د، ب ج محور پر عمود ہیں وہ دو متوازی سطوں میں حرکت کرتے ہیں اور اسطوانہ کے مستدیر سروں یا **قاعدوں** کو مرتسم کرتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ قائم اسطوانہ کا عمودی **ارتفاع** اس کے محور ا ب کا طول ہے۔

اگر ایک قائم مستدیر اسطوانہ کی مستوی تراش قاعدہ کے متوازی لی جائے تو ظاہر ہے کہ یہ تراش ایک دائرہ ہوگی۔ نیز اگر اسطوانہ کو محور کے متوازی کاٹا جائے تو تراش ایک مستطیل ہوگی۔

۲۷- بالعموم اگر ایک تکوینی خط ایک ثابت منحنی پر (جو اس سطح میں واقع نہ ہو جس پر خط مذکور واقع ہے) علی التسلسل پھسلے اور اثنائے حرکت میں ہمیشہ اپنے متوازی رہے تو یہ ایک سطح مرتسم کرے گا جس کو **اسطوانی سطح** کہتے ہیں۔ ثابت منحنی **قائد** کہلاتا ہے۔ قائم مستدیر اسطوانہ کی خاص صورت میں قائد ایک دائرہ ہے جس کی سطح تکوینی خط پر عمود ہے۔ اگر اس کے خلاف ذکر نہ ہو تو کتاب کے اس حصہ میں صرف قائم مستدیر اسطوانوں پر بحث ہو گی۔

۲۸- اسطوانہ کی سطح اور حجم دریافت کرو

ایک قائم منشور پر غور کرو جس کا قاعدہ ایک منتظم کثیرالاضلاع ہے۔ اگر قاعدہ کی تعدادِ اضلاع کو لاانتہا بڑھا دیا جائے تو کثیرالاضلاع بالآخر ایک دائرہ بن جائے گا اور اس صورت میں منشور کی شکل قریب قریب ایک قائم اسطوانہ ہو گی، پس اسطوانہ کو ہم ایک منشور کی انتہائی صورت

خیال کر سکتے ہیں اور اس وجہ سے اسطوانہ کی سطح اور حجم کے متعلقہ جملات منشور کے متناظر جملوں سے حاصل ہو سکتے ہیں دیکھو صفحات ۹۰، ۸۰۔

پس

(۱) اسطوانہ کی منحنی سطح = (قاعدہ کا محیط) × ارتفاع

= ۲ π ر × ف

= ۲ π ر ف رقبہ کی اکائیاں

(۲) اسطوانہ کا حجم = (قاعدہ کا رقبہ) × ارتفاع

= π ر^{۲} × ف

= π ر^{۲} ف حجم کی اکائیاں

نوٹ ۱۔ کل سطح = منحنی سطح + سروں کا رقبہ

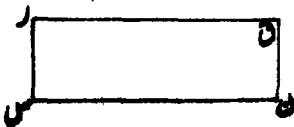
= ۲ π ر ف + ۲ π ر^{۲}

= ۲ π ر (ف + ر)

نوٹ ۲۔ ایک ایسے مائل اسطوانہ کا حجم جو کسی قاعدہ پہ کھڑا ہو ضابطۂ ذیل سے حاصل ہوگا

حجم = (قاعدہ کا رقبہ) × (عمودی ارتفاع)

مائل منشور کی صورت میں بھی یہی ضابطہ تھا۔

نوٹ ۳۔ اسطوانہ کی منحنی سطح کیلئے جو ضابطہ اوپر دیا گیا ہے اُس کی توضیح اس طرح ہو سکتی ہے۔

فرض کرو کہ اسطوانہ کی سطح ایک تکوینی خط ن ق پر کاٹ دی گئی ہے اور پھر اس کو کھول کر ایک مستوی سطح پر بچھا دیا گیا ہے، ظاہر ہے کہ سطح ایک مستطیل ن ق ر س کی شکل اختیار کرے گی اور اس مستطیل کا طول ن س اور عرض ن ق بالترتیب اسطوانہ کا محیط اور ارتفاع ہوگا۔

پس منحنی سطح = ن س × ن ق

= محیط × ارتفاع

نوٹ ۴۔ جو منحنی سطحیں بغیر کھنچنے یا پھٹنے کے اس طرح کھل سکیں کہ مستوی شکلوں سے تعبیر ہو سکیں ان کو قابل استوا سطحیں کہتے ہیں۔

مشقیں

[جن مثالوں میں π واقع ہوتا ہے ان کے حل کرنے میں مناسب ہوگا کہ π کی جگہ اس کی عددی قیمت بین آخر تک مندرج نہ کی جائے اور ہر صورت میں π کی وہ عددی قیمت منتخب کی جائے جس سے جواب کو مطلوبہ درجہ صحت تک حاصل ہو]

۱۔ جن اسطوانوں کے ابعاد ذیل میں درج ہیں ان کی منحنی سطحیں (قریب ترین مربع سنتی میٹر تک) اور حجم (قریب ترین مکعب سنتی میٹر تک) دریافت کرو

(۱) ر = ۳٫۰ سنتی میٹر، ف = ۸٫۰ سنتی میٹر

(۲) ر = ۵٫۴ " ، ف = ۲٫۱ "

۲۔ ایک ایسے اسطوانہ کی کل سطح قریب ترین مربع سنتی میٹر تک

دریافت کرو جس کا ارتفاع ۱۵٫۸ سنتی میٹر ہو اور جس کے قاعدہ کا
قطر ۴٫۸ سنتی میٹر ہو۔

۳۔ ایک قائم منشور کا قاعدہ شکل میں مربع ہے جس کا ضلع ۲٫۶
سنتی میٹر ہے، ایک اسطوانہ جس کا ارتفاع ۱۲ سنتی میٹر ہے اس
منشور کے اندر ٹھیک آسکتا ہے، اسطوانہ کا حجم قریب ترین مکعب سنتی
میٹر تک دریافت کرو۔

۴۔ اُس نقطہ کا طریق دریافت کرو جس کا عمودی فاصلہ ایک مفروضہ
محدود مستقیم خط سے مستقل ہو۔

اگر عمودی فاصلہ = ۳٫۵ سنتی میٹر، اور مفروضہ خط کا طول = ۵٫۶
سنتی میٹر، تو قریب ترین مربع سنتی میٹر تک اُس سطح کا رقبہ دریافت
کرو جس پر یہ نقطہ واقع ہو سکتا ہے۔

[نوٹ سنتی میٹر = سمر]

۵۔ ایک مجوف اسطوانہ کے دونوں سرے کھلے ہیں، اس کا طول
۱۲ سمر ہے بیرونی قطر ۸ سمر اور موٹائی ۲ سمر ہے، قریب ترین
مربع سنتی میٹر تک اس کی کل سطح دریافت کرو۔

۶۔ اسطوانہ کی شکل کا ایک ستون ہے، اس کا حجم ۱۲۸٫۲
مکعب میٹر ہے اور اس کے قاعدہ کا قطر ۴ میٹر ہے، قریب
ترین سنتی میٹر تک اس کا ارتفاع معلوم کرو۔

۷۔ ایک مکعب انچ سونے سے ۱۰۰۰ گز لمبا تار بنایا گیا ہے،
تار کا قطر انچ کے قریب ترین ہزارویں حصہ تک دریافت کرو۔

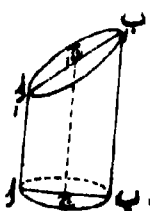
۸۔ ایک اسطوانہ کی منحنی سطح ۱۰۰۰ مربع سنتی میٹر ہے اور اُسکے

قاعدہ کا قطر ۲۰ سنتی میتر ہے، اسطوانہ کا حجم دریافت کرو، نیز
قریب ترین ملی میتر تک اس کا ارتفاع معلوم کرو۔

۹۔ ایک لکڑی کا قالب قائم منشور کی شکل کا ہے، اس کا ارتفاع
$\frac{1}{4}$ ۸ فٹ ہے اور اس کے مستطیل قاعدہ کے اضلاع ا فٹ
۴ انچ اور ا فٹ ہیں، یہ قالب اسطوانہ کی شکل کے ایک
خول میں پھنس کر آتا ہے، اگر قالب اور خول کے درمیان کی
جگہ میں کنکر چونا بھرنے سے ایک ستون بنایا جائے تو قریب ترین
مکعب فٹ تک کنکر چونے کا حجم دریافت کرو۔

۱۰۔ ایک لوہے کا نل اسطوانہ کی شکل کا ہے، اس کا طول ۱۸ میتر ہے،
بیرونی قطر ۴ء۵ سنتی میتر اور موٹائی ۴ ملی میتر۔ اگر لوہے کی
کثافتِ اضافی ۷ء۹ ہو تو نل کا وزن کلوگراموں میں پہلے درجہ
کے قریب ترین اعشاریہ تک دریافت کرو۔

۱۱۔ ایک تانبے کا تار کو جس کا قطر ۲ ملی میتر ہے ایک اسطوانہ
کے گرد اس کی تمام سطح پر یکساں طور پر لپیٹا گیا ہے، اسطوانہ
کا طول ۱۲ سنتی میتر ہے اور قطر ۱۰ سنتی میتر، اگر تانبے کی
کثافت اضافی ۸۸ء۸ ہو تو تار کا طول اور وزن دریافت کرو۔

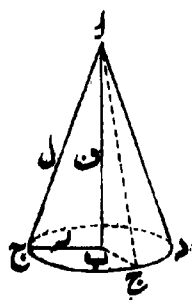
۱۲۔ حاشیہ کی شکل میں ایک ناقص
اسطوانہ ہے جو مائل تراش سے
پیدا ہوا ہے۔ ایسا خیال کرو کہ
اس مجسم کو ایک ایسی مستوی سطح
کاٹتی ہے جو ج میں سے گذرتی ہے

اور قاعدہ ا ب کے متوازی ہے۔ اس طرح سے ثابت کرو کہ

(۱) منحنی سطح $= ۲\pi$ ر × ج ج $= ۲\pi$ ر × $\frac{ف_۱ + ف_۲}{۲}$

(۲) مجسم $= \pi$ ر^۲ × ج ج $= \pi$ ر^۲ × $\frac{ف_۱ + ف_۲}{۲}$

جہاں ف۱ اور ف۲ بالترتیب ناقص اسطوانہ کے اعظم اور اقل ارتفاعوں کو تعبیر کرتے ہیں۔

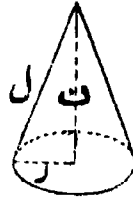
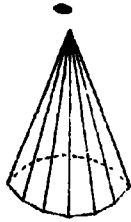
مخروط

۲۹۔ تعریف، قائم مستدیر مخروط وہ مجسم ہے جو مثلث قائم الزاویہ کو اُس کے ایک ضلع کے گرد گھمانے سے حاصل ہوتا ہے، زاویہ قائمہ کے احاطہ کرنے والے اضلاع میں سے ہم کسی ایک ضلع کو محور مان سکتے ہیں۔ مثلاً اگر مثلث قائم الزاویہ ا ب ج کے ضلع ا ب کو محور مان کر ثابت کردیا جائے اور مثلث کو اس کے گرد گھمایا جائے تو وتر ا ج کے گھومنے سے مخروط کی منحنی سطح پیدا ہوگی دیکھو شکل۔ وتر ا ج کو جو اپنے سب مقامات میں ثابت نقطہ ا میں سے گذرتا ہے سطح کا تکوینی خط کہتے ہیں، نیز جس دائرہ کو نصف قطر ب ج مرتسم کرتا ہے اُس کو مخروط کا قاعدہ کہتے ہیں۔ نقطہ ا راس کہلاتا ہے اور زاویہ ج ا د کو (جو گھومنے والے

مثلث کے زاویہ ا کا دو چند ہے) راسی زاویہ کہتے ہیں۔
مخروط کا ارتفاع محور اب کا طول ہے اور مائل ارتفاع
وتر اج ہے۔

اگر قائم مستدیر مخروط کو قاعدہ کے متوازی ایک مستوی سطح سے
کاٹا جائے تو ہر صورت میں تراش دائرہ ہوگی، نیز اگر اس مخروط
کو راس میں سے گذرنے والی ایک مستوی سطح سے کاٹیں تو
ہر صورت میں تراش متقاطع مستقیم خطوں کا ایک زوج ہوگی۔

۳۰۔ بالعموم اگر ایک تکوینی خط اس طرح حرکت کرے کہ وہ
ایک ثابت نقطہ میں سے ہمیشہ گذرے اور اثنائے حرکت
میں ایک رہنمائی کرنے والے ثابت منحنی پر (جو اسی سطح میں
واقع نہ ہو جس پر خط مذکور واقع ہے) علی التسلسل پھسلتا جائے
تو اس طرح سے جو سطح یہ مرتسم کرے گا اس کو مخروطی سطح
کہتے ہیں۔ قائم مستدیر اسطوانہ کی صورت میں رہنمائی کرنیوالا
منحنی یعنی قائد ایک دائرہ ہے اور اگر اس دائرہ کے
مرکز میں سے ایک خط کھینچیں جو دائرہ کی سطح پر عماد
ہو تو اس خط پر کا کوئی نقطہ مخروط کا راس ہو سکتا
ہے۔

اگر اس کے خلاف ذکر نہ ہو تو کتاب کے اس
حصہ میں صرف قائم مستدیر مخروطوں پر بحث
ہوگی۔

۳۱۔ مخروط کی سطح اور حجم دریافت کرو۔

ایک قائم مضلع مخروط پر غور کرو جس کا قاعدہ ایک منتظم کثیر الاضلاع ہے۔

اگر قاعدہ کی تعداد اضلاع کو لا انتہا بڑھایا جائے تو کثیر الاضلاع ایک دائرہ ہو جائیگا اور مخروطِ مضلع بالآخر ایک قائم مخروط کی شکل اختیار کر لے گا، اس لحاظ سے مخروط کی منحنی سطح اور حجم کے متعلق جو جملات مطلوب ہیں وہ مخروطِ مضلع کے متناظر جملات (صفحات ۸۹، ۹۳) سے حاصل ہو سکتے ہیں

پس اگر مخروط کا عمودی ارتفاع ف ہو، مائل ارتفاع ل اور قاعدہ کا نصف قطر ر تو

(۱) مخروط کی منحنی سطح $= \frac{1}{2}$ (قاعدہ کا محیط) × مائل ارتفاع

$= \frac{1}{2} \times 2\pi$ ر × ل

$= \pi$ ر ل رقبہ کی اکائیاں

چونکہ ایک مضلع مخروط کا حجم ایک ایسے منشور کے حجم کا ایک تہائی ہوتا ہے جس کا قاعدہ اور ارتفاع دونوں وہی ہوں جو منشور کے ہیں اس لئے

اس کے متناظر اسطوانہ کے حجم کا ایک تہائی ہو گا۔ پس

مخروط کا حجم = $\frac{1}{3}$ (قاعدہ کا رقبہ) × (ارتفاع)

= $\frac{1}{3}$ × π ر^{2} × ف

= $\frac{1}{3}$ π ر^{2} ف حجم کی اکائیاں

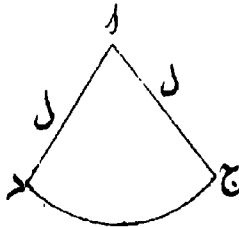
نوٹ ۱۔ کل سطح = منحنی سطح + قاعدہ کا رقبہ

= π ر ل + π ر^{2}

= π ر (ل + ر)

نوٹ ۲۔ ایک ایسے مائل مخروط کا حجم جو کسی قاعدہ پر کھڑا ہو مائل مضلع مخروط کے حجم کی طرح ضابطہ ذیل سے حاصل ہو سکتا ہے،

حجم = $\frac{1}{3}$ (قاعدہ کا رقبہ) × (عمودی ارتفاع)

نوٹ ۳۔ مخروط کی منحنی سطح کے متعلق جو ضابطہ اوپر دیا گیا ہے اس کی توضیح اس طرح ہو سکتی ہے

فرض کرو کہ مخروط کی سطح کو تکوینی خط اج پر کاٹ کر ایک مستوی سطح پر بچھا دیا گیا ہے، ظاہر ہے کہ سطح مذکور ایک ایسے

قطاعِ دائرہ کی شکل اختیار کرے گی جس کا نصف قطر ا ج مخروط کا ارتفاعِ مائل ہوگا اور جس کی قوس ج د مخروط کے قاعدہ کے محیط کے مساوی ہوگی۔

پس منحنی سطح = $\frac{1}{2}$ قوس ج د × نصف قطر ا ج

$$= \frac{1}{2} \times 2\pi \text{ ر} \times \text{ل}$$

اس سے معلوم ہوا کہ قائم مستدیر مخروط کی منحنی سطح قابل استوا ہے۔

مشقیں

۱۔ ایک قائم مستدیر مخروط کی سطح س ، حجم ح، ارتفاع ف، قاعدہ کا نصف قطر ر اور راسی زاویہ کا نصف عہ ہے، ذیل کے ضابطوں کو ثابت کرو

(۱) $\text{س} = \frac{\pi \text{ ف}^2 \text{ مس عہ}}{\text{جم عہ}}$ ، $\text{ح} = \frac{1}{3} \pi \text{ ف}^3 \text{ مس}^2 \text{ عہ}$

(۲) $\text{س} = \frac{\pi \text{ ر}^2}{\text{جب عہ}}$ ، $\text{ح} = \frac{1}{3} \times \frac{\pi \text{ ر}^3}{\text{مس عہ}}$

اس لئے ثابت کرو کہ جن مخروطوں کے راسی زاوئے مساوی ہوں اُن کے حجموں کو آپس میں وہی نسبت ہوتی ہے جو ان کے ارتفاعوں کے کعبوں کو آپس میں ہو۔

۲۔ ذیل کے مخروطوں کی سطحیں قریب ترین مربع سنتی میٹر تک اور حجم قریب ترین کعب سنتی میٹر تک دریافت کرو۔

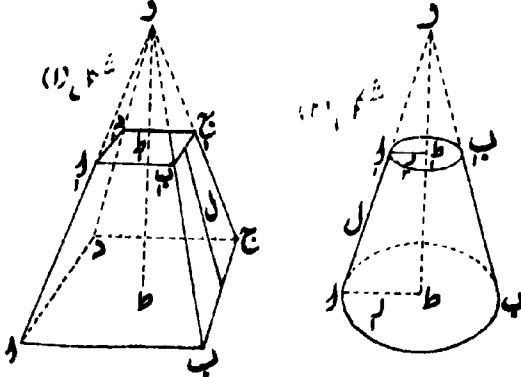
(۱) ر = ۶ سنتی میٹر، ل = ۱۰ سنتی میٹر
(۲) ر = ۱٫۲ سنتی میٹر، ن = ۳٫۵ سنتی میٹر

۳۔ ایک مخروط کا ارتفاع ۴۰ سنتی میٹر اور اس کے قاعدہ کا قطر ۱۸ سنتی میٹر ہے، قریب ترین مربع سنتی میٹر تک اس کی کل سطح دریافت کرو۔

۴۔ ایک مخروط کا مائل ارتفاع ۵٫۱ سنتی میٹر ہے اور عمودی ارتفاع ۴٫۵ سنتی میٹر، قریب ترین مکعب سنتی میٹر تک اس کا حجم دریافت کرو۔

[مخروطوں پر مزید مشقوں کے لئے دیکھو صفحہ ۱۲۷]

مخروط ناقص اور مضلع مخروط ناقص

۳۲۔ **تعریف**۔ اگر ایک مخروط یا مخروط مضلع کو قاعدہ کے متوازی ایک مستوی سطح سے کاٹیں تو ہر صورت میں قاعدہ اور مستوی سطح کے درمیان مجسم کا جو حصہ کٹتا ہے اس کو بالترتیب مخروطِ ناقص اور مضلع مخروطِ ناقص کہتے ہیں۔

مثلاً شکل (۱) میں مضلع مخروط (و' ا ب ج د) کا جو حصہ قاعدہ ا ب ج د اور متوازی تراش اِ بِ جِ دِ کے درمیان ہے اسکو مضلع مخروط ناقص کہینگے۔

شکل (۲) میں مخروط ناقص، مخروط (و' ا ب) کا وہ حصہ ہے جو قاعدہ ا ب اور متوازی تراش اِ بِ کے درمیان ہے۔

شکل (۱) میں ا ب ج د، اِ بِ جِ دِ کو مضلع مخروط ناقص کے سرے کہتے ہیں، اسی طرح شکل ۲ میں مخروط ناقص کے سرے ا ب، اِ بِ ہیں۔ ہر مضلع مخروط ناقص کے سرے متشابہ شکلیں ہیں (دفعہ ۱۳، صفحہ ۷۲)، مخروط ناقص کے سرے دائرے ہیں۔

مضلع مخروط ناقص کی مائل سطح منحرف شکلوں سے بنی ہوئی ہے، اگر قاعدہ ا ب ج د ایک منتظم شکل ہو اور مضلع مخروط قائم ہو تو یہ منحرف اشکال سب مساوی ہونگی۔

۴۳۔ فرض کرو کہ مضلع مخروط ناقص کے سروں میں رقبہ کی ق اور قِ اکائیاں ہیں اور راس و سے سروں پر عمود نکالا گیا ہے جو ان کو بالترتیب نقاط ط اور طِ پر کاٹتا ہے، تو (دفعہ ۱۳، صفحہ ۷۲) یہ ثابت ہو چکا ہے کہ

$$ق : قِ = و ط^2 : و طِ^2$$

۴۴۔ قائم مضلع مخروط ناقص کا قاعدہ ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع ہے، مجسم کی مائل سطح اور حجم دریافت کرو۔

دفعہ ۴۲ کی شکل اول میں فرض کرو کہ ناقص کی موٹائی ط ط۱، ک کے مساوی ہے، اور اس کے سروں کے متناظر اضلاع کے کسی زوج ب ج، ب۱ج۱ کے طول ا، ا۱ ہیں۔ نیز فرض کرو کہ ان ضلعون کا عمودی فاصلہ ایک دوسرے سے (یعنی ناقص کی مائل موٹائی) ل ہے، اور سروں اب ج د، ا۱ب۱ج۱د۱ کے رقبے ق۱، ق۲ ہیں تو

(۱) مضلع مخروطِ ناقص کی مائل سطح = منحرف ب ج ج۱ب۱ کا ن گنا

= ½ (ا + ا۱) ل × ن

= ½ (ن ا + ن ا۱) ل رقبہ کی اکائیاں

= ½ (سروں کے محیطوں کا حاصل جمع) × مائل موٹائی

(۲) ارتفاع و ط، و ط۱ کو بالترتیب ف۱، ف۲ سے تعبیر کرو تب ف۱ - ف۲ = ک

اب ق۱/ف۱² = ق۲/ف۲² = م جہاں م مستقل ہے

∴ ق۱ = م ف۱² اور ق۲ = م ف۲²

اسلئے مضلع مخروطِ ناقص کا حجم = مضلع مخروط (و، اب ج د) - مضلع مخروط (و، ا۱ب۱ج۱د۱)

= ⅓ ق۱ ف۱ - ⅓ ق۲ ف۲

$$= \frac{1}{3}\left(\text{ف}_1^3 - \text{ف}_2^3\right)\text{م}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\text{ف}_1 - \text{ف}_2\right)\left(\text{ف}_1^2 + \text{ف}_1\text{ف}_2 + \text{ف}_2^2\right)\text{م}$$

$$= \frac{1}{3}\text{ک}\left(\text{م}\,\text{ف}_1^2 + \sqrt{\text{م}\,\text{ف}_1^2 \times \text{م}\,\text{ف}_2^2} + \text{م}\,\text{ف}_2^2\right)$$

$$= \frac{1}{3}\text{ک}\left(\text{ق}_1 + \sqrt{\text{ق}_1\text{ق}_2} + \text{ق}_2\right)$$

۳۵۔ قائم مخروطِ ناقص کی منحنی سطح اور حجم دریافت کرو۔

قائم مخروط ایک ایسے قائم مضلع مخروط کی انتہائی شکل خیال کیا جا سکتا ہے، جس کا قاعدہ ایک منتظم کثیر الاضلاع ہو، اس طرح سے مخروطِ ناقص کی منحنی سطح اور حجم کے متعلق جو جملے مطلوب ہیں وہ مضلع مخروطِ ناقص (دفعہ ۳۴) کے متناظر جملوں سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

دفعہ ۳۲ کی شکل (۲) میں فرض کرو کہ سروں ا ب اور $\text{ا}_1\text{ب}_1$ کے نصف قطر ل_1 اور ل_2 ہیں، نیز موٹائی $\text{ط}\,\text{ط}_1 = \text{ک}$ اور مائل موٹائی $\text{ا}\,\text{ا}_1 = \text{ل}$

تب $\text{ق}_1 = \pi\,\text{ل}_1^2$ اور $\text{ق}_2 = \pi\,\text{ل}_2^2$

(۱) مخروطِ ناقص کی منحنی سطح $= \frac{1}{2}$ (سروں کے محیطوں کا مجموعہ) × (مائل موٹائی)

$$= \frac{1}{2}\left(2\pi\,\text{ل}_1 + 2\pi\,\text{ل}_2\right)\text{ل}$$

$$= \pi\left(\text{ل}_1 + \text{ل}_2\right)\text{ل}$$ رقبہ کی اکائیاں

(۲) مخروطِ ناقص کا حجم $= \frac{\text{ک}}{3}\left[\text{ق}_1 + \sqrt{\text{ق}_1\text{ق}_2} + \text{ق}_2\right]$

$$= \frac{\text{ک}}{۳}\left[\pi \text{ر}_۱^۲ + \sqrt{\pi \text{ر}_۱^۲ \times \pi \text{ر}_۲^۲} + \pi \text{ر}_۲^۲\right]$$

$$= \frac{\pi \text{ک}}{۳}\left[\text{ر}_۱^۲ + \text{ر}_۱\text{ر}_۲ + \text{ر}_۲^۲\right]$$ حجم کی اکائیاں

نوٹ ۱۔ چونکہ $\text{ر}_۱ + \text{ر}_۲ =$ اُس مستدیر تراش کے نصف قطر کا دو چند جس کے عمودی فاصلے دونوں سروں سے مساوی ہیں

اس لئے مخروط ناقص کی منحنی سطح $= \pi(\text{ر}_۱ + \text{ر}_۲)\text{ل} = ۲\pi \frac{\text{ر}_۱ + \text{ر}_۲}{۲}\text{ل}$

= (وسطی تراش کا محیط)(مائل موٹائی)

نوٹ ۲۔ اگر سروں کے رقبے $\text{ق}_۱$، $\text{ق}_۲$ ہوں اور وسطی تراش کا رقبہ ق ہو تو

مخروط ناقص کا حجم $= \frac{\pi \text{ک}}{۳}\left(\text{ر}_۱^۲ + \text{ر}_۱\text{ر}_۲ + \text{ر}_۲^۲\right)$

$$= \frac{\pi \text{ک}}{۶}\left(۲\text{ر}_۱^۲ + ۲\text{ر}_۱\text{ر}_۲ + ۲\text{ر}_۲^۲\right)$$

$$= \frac{\pi \text{ک}}{۶}\left(\text{ر}_۱^۲ + \overline{\text{ر}_۱ + \text{ر}_۲}^۲ + \text{ر}_۲^۲\right)$$

$$= \frac{\pi \text{ک}}{۶}\left\{\text{ر}_۱^۲ + ۴\left(\frac{\text{ر}_۱ + \text{ر}_۲}{۲}\right)^۲ + \text{ر}_۲^۲\right\}$$

$$= \frac{\text{ک}}{۶}\left(\text{ق}_۱ + ۴\text{ق} + \text{ق}_۲\right)$$

اس آخری نتیجہ کو ضابطۂ منشور نما کہتے ہیں، یہ ہر ایک ایسے مجسم کی صورت میں درست ہے جس کے سرے متوازی شکلیں ہوں (ضروری نہیں کہ متشابہ بھی ہوں) اور ان شکلوں کی تعداد اضلاع ایک ہی ہونے کے علاوہ ان کے متناظر اضلاع کا ہر ایک زوج متوازی ہو۔ ایسے مجسم کو **منشور نما** کہتے ہیں اور مخروط ناقص، مضلع مخروط ناقص اس کی خاص صورتیں ہیں۔

مشقیں

مضلع مخروط ناقص اور مخروط ناقص کے متعلق

۱۔ ایک مضلع مخروط ناقص کے سرے شکل میں مربع ہیں اور ان کے اضلاع ۴ سنتی میٹر اور ۲ سنتی میٹر ہیں، اگر ناقص کی موٹائی ۱۵ سنتی میٹر ہو تو اس کی مائل سطح دریافت کرو

۲۔ ایک مخروط ناقص کی مائل موٹائی ۵ سنتی میٹر ہے اور اس کے مستدیر سروں کے قطر ۸ سمر اور ۶ سمر ہیں، اس مخروط کی منحنی سطح دریافت کرو۔

۳۔ ایک مضلع مخروط ناقص کے سرے شکل میں مربع ہیں اور ان مربعوں کے اضلاع بالترتیب ۸ سمر اور ۶ سمر ہیں، اگر ناقص کی موٹائی ۳ سمر ہو تو اس کا حجم دریافت کرو۔

۴۔ ایک مخروط ناقص کی مائل موٹائی ۵ سنتی میٹر ہے اور اس کے سروں کے نصف قطر بالترتیب ۴ سمر اور ۱ سمر ہیں، ناقص کی منحنی سطح قریب ترین مربع سنتی میٹر تک اور اس کا حجم

قریب ترین مکعب سنتی میٹر تک دریافت کرو۔

۵۔ ایک مضلع مخروطِ ناقص کے سرے مربع شکل کے ہیں اور ان کے اضلاع بالترتیب ۸،۰ سمر اور ۴،۱ سمر ہیں، اگر ناقص کی موٹائی ۶،۵ سمر ہو تو قریب ترین مربع سنتی میٹر تک اس کی مائل سطح دریافت کرو۔

۶۔ ایک مضلع مخروطِ ناقص کے سرے مثلث شکل کے ہیں، قاعدہ کے اضلاع ۱۳ سمر، ۱۲ سمر، ۵ سمر ہیں اور چوٹی کے ۶،۵ سمر، ۶ سمر، ۲،۵ سمر، اگر ناقص کی موٹائی ۸ سمر ہو تو اسکا حجم دریافت کرو۔

۷۔ ایک مخروطِ ناقص کے سروں کے نصف قطر $ل_۱$، $ل_۲$ ہیں اور اس کا ارتفاع ف ہے، ثابت کرو کہ اس کا حجم ایک اسطوانہ اور ایک مخروط کے حجموں کے حاصل جمع کے مساوی ہے جہاں اسطوانہ اور مخروط کے ارتفاع (ف) برابر ہیں اور ان کے قاعدوں کے نصف قطر بالترتیب $\frac{1}{2}(ل_۱ + ل_۲)$ اور $\frac{1}{2}(ل_۱ - ل_۲)$ ہیں۔

۸۔ ایک مخروطِ ناقص کے سروں کے جو نصف قطر ہیں انکا وسطِ تناسب مخروط ناقص کے ارتفاع کا نصف ہے، ثابت کرو کہ مائل ارتفاع نصف قطروں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

۹۔ ایک مخروط کا ارتفاع ن سمر ہے، قاعدہ سے ا سمر کے فاصلہ پر اسکے متوازی ایک مستوی سطح مخروط کو کاٹتی ہے، معلوم کرو کہ اس طرح سے جو ناقص مخروط حاصل ہوتا ہے اس کا حجم کل مخروط کے حجم کی کونسی کسر ہے۔

۱۰۔ ایک مضلع مخروطِ ناقص کے سرے مربع شکل کے ہیں، مخروطِ ناقص کی موٹائی ۶ سم ہے اور اسکے ایک سرے کا رقبہ دوسرے سرے کے رقبہ کا چار گنا ہے، اگر اس کا حجم ۳۵۰ مکعب سنٹی میٹر ہو تو سروں کے اضلاع دریافت کرو۔

مشقیں

(متفرق مثالیں مخروطوں پر)

۱۔ ایک مثلث اب ج میں اُ = ۶٫۵ سم، بَ = ۱۰٫۱ سم، اور اگر ج سے اب پر عمود نکالا جائے تو اس کا طول ۱٫۶ سم ہوتا ہے، اس مثلث کو ضلع اب کے گرد گھمانے سے جو دوہرا مخروطِ حاصل ہوتا ہے اس کا حجم قریب ترین مکعب سنٹی میٹر تک دریافت کرو۔

۲۔ دبیز کپڑے کا ایک ایسا مخروطی خیمہ بنانا مقصود ہے جس کا عمودی ارتفاع ۳۰ فٹ ہو اور جو ۱۳۸۶ مربع فٹ زمین گھیرے، اگر کپڑے کا عرض ۱ گز ہو تو قریب ترین فٹ تک دریافت کرو کہ کتنا کپڑا درکار ہوگا۔

۳۔ ایک مخروطی خیمہ ۸٫۰ سنٹی میٹر قطر کے مستدیر قاعدہ پر کھڑا ہے اور اس کے اندر ۹۰٫۴۶۸ مکعب میٹر ہوا ہے، اس کا ارتفاع ایک میٹر کے قریب ترین دسویں حصہ تک دریافت کرو۔

۴- ایک ٹھوس مکعب کا کنارہ ۲۰ سمر ہے، اس مکعب میں سے بڑے سے بڑا مخروط اس طرح کاٹا گیا ہے کہ اس کا قاعدہ اُسی سطح پر واقع ہوتا ہے جس پر مکعب کا قاعدہ ہے، مخروط کی کل سطح قریب ترین مربع سنتی میٹر تک دریافت کرو۔

۵- اسطوانہ کی شکل کے ایک نل میں سے جس کا قطر ۵ ملی میٹر ہے پانی ۱۰ میٹر فی منٹ کی رفتار سے بہتا ہے، بتاؤ کہ یہ نل ایک ایسے مخروطی ظرف کو کتنی دیر میں بھر دے گا جس کی گہرائی ۲۴ سمر ہو اور جس کی اوپر کی سطح کا قطر ۴۰ سمر ہو۔

۶- ایک مخروط کو ایک مستوی سطح سے قاعدہ کے متوازی کاٹا گیا ہے، مخروط ناقص کی سطح پورے مخروط کی سطح کی $\frac{۸}{۹}$ ہے، بتاؤ کہ مستوی سطح مخروط کے ارتفاع کو کس نسبت سے تقسیم کرتی ہے۔

۷- ایک ٹھوس اسطوانہ کا ارتفاع ۲٫۴ سمر ہے اور قطر ۱٫۴ سمر، اس کے اندر ایک مخروطی جوف بنایا گیا ہے جس کا قاعدہ اور ارتفاع بالترتیب وہی ہے جو اسطوانہ کا۔ باقی مجسم کی کل سطح قریب ترین مربع سنتی میٹر تک دریافت کرو۔

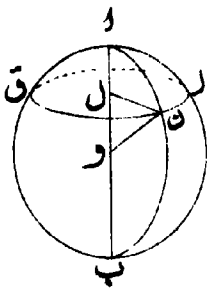
۸- ایک مخروطی ظرف کو جس کی گہرائی ۷٫۵ سنتی میٹر ہے اور جس کی اوپر کی سطح کا قطر ۲۰ سمر ہے پانی سے بھر دیا گیا ہے، اگر ظرف میں سے اتنا پانی نکالا جائے

کہ اس کی گہرائی بقدر ۰٫۶ سمر کے کم ہو جائے تو قریب ترین مربع ملی میٹر تک ظرف کی اُس سطح کا رقبہ دریافت کرو جو پانی کے ہٹ جانے سے خالی ہوگئی ہے۔

۹- ایک مخروطی ظرف دوسرے مخروطی ظرف کے اندر اس طرح رکھا گیا ہے کہ ان کے رأس اور محور مشترک ہیں، مشترک رأس نیچے کی طرف ہے اور مشترک محور افق پر عمود ہے۔ اندرونی ظرف کو تیل سے اور بیرونی ظرف کے باقی حصہ کو پانی سے ایک ہی ارتفاع تک بھر دیا گیا ہے۔ اگر تیل اور پانی کی سطحوں کے قطر بالترتیب ۰٫۷ سمر اور ۱۱٫۲ سمر ہوں تو تیل اور پانی کے وزنوں کی باہمی نسبت دریافت کرو جبکہ تیل کی کثافت اضافی ۰٫۹۲ ہو

۱۰- ایک ٹھوس اسطوانہ کا طول ۱۰ سمر اور قطر ۸ سمر ہے، اس کے اندر ہر سرے پر ایک مخروطی جوف بنایا گیا ہے جس کا قطر ۶ سمر ہے اور ارتفاع ۴ سمر، باقی مجسم کی کل سطح قریب ترین مربع سنتی میٹر تک دریافت کرو۔

کرہ

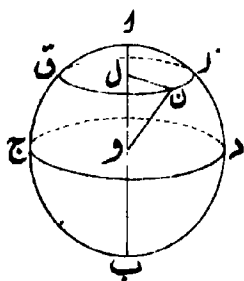
۳۶- تعریف۔ کرہ وہ مجسم ہے جو نصف دائرہ کو اُس کے قطر کے گرد گھمانے سے حاصل ہوتا ہے جبکہ قطر کو بطور محور ثابت کردیا جائے۔

مثلاً اگر نصف دائرہ ان ب
کو قطر ا ب کے گرد گھمائیں تو
نصف محیط ا ن ب ایک کرہ
کی سطح مرتسم کرے گا۔
نیز جب نصف محیط قطر کے گرد
گھومتا ہے تو محیط پر کا ہر نقطہ
مرکز و سے مستقل فاصلہ پر رہتا ہے
اس لئے معلوم ہوا کہ ایک ایسے نقطہ کا طریق یا مکان جو فضا
میں حرکت کرتا ہے اور اثنائے حرکت میں ایک ثابت نقطہ
سے مستقل فاصلہ پر رہتا ہے ایک کرہ کی سطح ہے۔
ثابت نقطہ کو کرہ کا مرکز اور مستقل فاصلہ کو نصف قطر
کہتے ہیں، قطر وہ خط مستقیم ہے جو مرکز میں سے گذرتا ہے
اور دونوں طرف کرہ کی سطح پر ختم ہوتا ہے، پس سب قطر
ایک دوسرے کے مساوی ہوئے۔

۳۷۔ کرہ کی ہر مستوی تراش دائرہ ہوتی ہے۔

شکل بالا میں فرض کرو کہ ایک سطح مستوی ق ن ل
کرہ کو کاٹتی ہے، اور کرہ کا مرکز و ہے اور نصف قطر
ر۔ نیز فرض کرو کہ خطِ تراش پر کوئی نقطہ ن ہے۔
کاٹنے والی سطح پر عمود و ل نکالو اور فرض کرو کہ
اس کا طول ط ہے، و ن، ن ل کو ملاؤ
اب چونکہ مستوی ق ن ل میں و ل، ل ن پر عمود ہے

$$\therefore ن ل^2 = و ن^2 - و ل^2$$
$$= ر^2 - ط^2$$
$$\therefore ن ل = \sqrt{ر^2 - ط^2} = \text{مستقل مقدار}$$

اس لئے ن کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز ایک ثابت نقطہ ل ہے

تعریف۔ قطر ا ب کو جو مستوی تراش ق ن ل پر عمود ہے تراش کا محور کہتے ہیں اور اس کے سرے ا ب تراش کے قطب کہلاتے ہیں۔

۳۸۔ اگر مستوی تراش کرہ کے مرکز میں سے گذرے تو ل مرکز و پر منطبق ہوگا اور اس صورت میں دائرہ ق ن ل کا نصف قطر بڑے سے بڑا ہوگا یعنی کرہ کے نصف قطر کے مساوی ہوگا۔

جس خط پر مرکز میں سے گذرنے والی مستوی تراش کرہ کو کاٹتی ہے اس کو دائرۂ کبیر کہتے ہیں، باقی سب مستوی تراشیں صغیر دائرے کہلاتی ہیں۔

۳۹۔ ایک کرہ کا نصف قطر ر ہے، اگر اس کی ایک مستوی تراش کا نصف قطر ر۱ ہو اور اس تراش کا فاصلہ مرکز سے ط ہو تو یہ ثابت ہو چکا ہے کہ

$$ر_1 = \sqrt{ر^2 - ط^2}$$

پس اگر یہ مستوی تراش مرکز و سے باہر کی طرف اپنے متوازی حرکت کرے تو ط کے بڑھنے سے ل گھٹیگا پس اگر ایک کرہ کی مستوی تراش کا فاصلہ مرکز سے بڑھتا جائے تو اس تراش کا نصف قطر بتدریج گھٹتا جائے گا اور بالآخر جب ل نقطہ ا پر منطبق ہوگا، تو ل معدوم ہو جائے گا یعنی اس وقت مستوی سطح کرہ کو صرف ایک نقطہ ا پر قطع کرے گی، اس کو اس طرح بیان کرتے ہیں کہ مستوی سطح اس حالت میں نقطہ ا پر کرہ کی مماسی سطح ہے، پس معلوم ہوا کہ کرہ کی سطح کے کسی نقطہ پر صرف ایک مماسی سطح ہو سکتی ہے اور یہ وہ مستوی سطح ہوتی ہے جو نقطہ مذکور میں سے گذرنے والے نصف قطر پر عمود ہو۔

۴۰۔ اگر مماسی سطح میں اس کے نقطۂ تماس میں سے ایک مستقیم خط کھینچا جائے تو وہ کرہ کی سطح کو صرف ایک نقطہ پر ملیگا، اس کو یوں بیان کرتے ہیں کہ یہ خط کرہ کو اس نقطہ پر مس کرتا ہے، پس کرہ کے کسی نقطہ پر بے شمار مماسی خط کھینچے جا سکتے ہیں اور ان میں سے ہر ایک اس نقطہ میں سے گذرنے والے نصف قطر پر عمود ہوتا ہے۔ پس اگر ایک مماسی خط کو اس کے نقطۂ تماس میں سے گذرنے والے نصف قطر کے گرد گھمایا جائے تو ظاہر ہے کہ اس کے گھومنے سے مماسی سطح

پیدا ہوگی۔

۴۱۔ اگر ا ب ایک کرہ کا قطر ہو تو ایسا دائرہ کبیر صرف **ایک** ہوسکتا ہے جس کا محور ا ب ہو اور ایسے کبیر دائرے بیشمار ہو سکتے ہیں جو قطبین ا اور ب میں سے گذریں۔

۴۲۔ کرہ پر کے دو مفروضہ نقطوں میں سے (جو ایک قطر کے سرے نہ ہوں) ایک اور صرف ایک کبیر دائرہ کھینچ سکتا ہے کیونکہ دائرہ کے مرکز اور ان دو نقطوں میں سے گذرنے والی مستوی سطح صرف ایک ہو سکتی ہے جو کرہ کو ایک کبیر دائرہ پر کاٹے۔

نوٹ۔ کرہ کی سطح پر کے دو نقطوں میں سے جو کبیر دائرہ گذرتا ہے اس کی چھوٹی قوس کو ان نقطوں کا کروی **فاصلہ** کہتے ہیں ، یہ آگے (صفحہ ۱۵۸ پر) ثابت کیا جائے گا کہ یہ قوس چھوٹے سے چھوٹا خط ہے جو ان نقطوں کے درمیان کرہ کی سطح پر کھینچا جاسکتا ہے۔ اب چونکہ کرہ کے سب کبیر دائرے مساوی ہوتے ہیں اس لئے کسی کبیر دائرہ کی ایک قوس اُس زاویہ سے تعبیر ہو سکتی ہے۔ جو قوس مذکور کے محاذی مرکز پر بنتا ہے [مسئلہ اثباتی ۶۹ ' اسکول جومیٹری]

پس شکل دفعہ ۳۸ میں نقاط ق اور ج کا کروی فاصلہ زاویہ ق و ج سے تعبیر ہوسکتا ہے اور درجوں میں ناپا جاسکتا ہے کبیر دائرہ ج د پر کے کسی نقطہ کا کروی فاصلہ قطب ا سے ۹۰° ہے۔

۴۳۔ کرہ کی سطح پر کے کسی تین نقطوں میں سے صرف ایک دائرہ (ضروری نہیں کہ یہ کبیر ہو) کرہ کی سطح پر کھینچ سکتا ہے کیونکہ ان تین نقطوں سے صرف ایک مستوی سطح کا تعین ہوگا جو کرہ کو ان نقطوں میں سے گذرنے والے ایک دائرہ پر کاٹے گی۔

۴۴۔ دو نقاط مفروضہ میں سے لاانتہا کرے گذر سکتے ہیں اور ان سب کے مرکز ایک ثابت مستوی سطح پر واقع ہوتے ہیں

اگر ق اور ر مفروضہ نقطے ہوں تو ظاہر ہے کہ وہ سب نقطے جو ق اور ر سے متساوی الفصل ہوں ایک مستوی سطح پر واقع ہوں گے جو مستقیم خط ق ر کی زاویہ قائمہ پر تنصیف کرے گی۔ اس لئے اس سطح پر کے کسی نقطہ کو مرکز مان کر ایک کرہ کھینچ سکتا ہے جو ق اور ر میں سے گذرے۔

۴۵۔ تین نقاط مفروضہ میں سے لاانتہا کرے گذرتے ہیں اور ان کے مرکز ایک ثابت مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں

شکل دفعہ ۳۸ میں فرض کرو کہ تین نقطے ن، ق، ر ہیں اور ان میں سے گذرنے والے دائرہ کا مرکز ل ہے، فرض کرو کہ خط ا ب نقطہ ل میں سے گذرتا ہے اور ن، ق، ر کی سطح مستوی پر عمود ہے۔ اب اگر ا ب پر کوئی

نقطہ و لیا جائے تو یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے
کہ مثلثات و ن ل، و ق ل، و ر ل ہر طرح سے
ایک دوسرے کے برابر ہیں، اسلئے و ن = و ق = و ر
پس ا ب پر کے کسی نقطہ کو مرکز مان کر ایک کرہ ن، ق، ر
میں سے کھینچ سکتا ہے، دوسرے الفاظ میں نقاط ن، ق، ر
میں سے بیشمار کرے کھینچ سکتے ہیں اور ان کے مرکزوں کا
طریق ایک مستقیم خط ا ب ہے جو مثلث ن ق ر کی
سطح پر عمود ہے اور اس مثلث کے بیرونی دائرہ کے مرکز
میں سے گذرتا ہے۔

۹۴۔ ایسے چار نقطوں میں سے جو ایک ہی مستوی سطح پر
واقع نہ ہوں صرف ایک کرہ گذر سکتا ہے۔

فرض کرو کہ چار نقطے ا، ب، ج، د ایک ہی سطح پر واقع
نہیں ہوتے اور مثلث ا ب ج، ا د ج کے بیرونی
دائروں کے مرکز ف، گ ہیں۔

فرض کرو کہ نقاط ف اور گ سے مستویات ا ب ج اور ا د ج پر بالترتیب عمود ف س اور گ ک نکالے گئے ہیں۔

تب ف س پر کا ہر نقطہ ا، ب، ج سے متساوی الفصل ہے، اور گ ک پر کا ہر نقطہ ا، د، ج سے مساوی فاصلہ پر ہے، اس لئے خطوط ف س اور گ ک میں سے ہر ایک کا ہر نقطہ ا اور ج سے مساوی فاصلہ پر ہے لیکن وہ سب نقطے جو ا اور ج سے متساوی الفصل ہیں ایک مستوی سطح پر واقع ہوتے ہیں جو ا ج کی زاویہ قائمہ پر تنصیف کرتی ہے۔

اس لئے ف س اور گ ک دونوں اس مستوی میں واقع ہوتے ہیں اور چونکہ وہ متوازی نہیں ہو سکتے (کیونکہ وہ دو متقاطع سطوح مستویہ پر جداگانہ عمود ہیں) اس لئے وہ لازماً ایک دوسرے سے کسی نقطہ و پر ملینگے۔

پس ف س اور گ ک کا ایک ہی مشترک نقطہ و نقاط ا، ب، ج، د چاروں سے مساوی فاصلہ پر ہوگا۔

پس اگر و کو مرکز اور و ا کو نصف قطر مان کر ایک کرہ کھینچا جائے تو وہ ا، ب، ج، د میں سے گذریگا اور یہ ایک ہی کرہ ہے جو ان چار نقطوں میں سے گزر سکتا ہے۔

مشقیں کرہ کے متعلق

(نظری)

۱۔ دو ہم مرکز کروں میں اندرونی کرہ کی کوئی مماسی سطح بیرونی کرہ کو ایک ایسے دائرہ پر کاٹتی ہے جس کا نصف قطر مستقل ہوتا ہے۔

۲۔ کرہ کی سطح پر ان سب نقطوں کا طریق دریافت کرو جو ایک نقطۂ مفروضہ ن سے مستقل فاصلہ پر ہوں، مختلف صورتوں میں جب ن کرہ کے اندر، اوپر یا باہر ہو شکلوں کے ذریعہ اس کی توضیح کرو۔

۳۔ دو کروں کے نصف قطر ر، رَ ہیں اور ان کے مرکزوں کا باہمی فاصلہ ل سمر ہے، کیا شرائط ہیں کہ یہ کرے ایک دوسرے کو (۱) مس کریں (۲) قطع کریں۔

اگر کرے قطع کریں تو ثابت کرو کہ اُن کا خط تراش ایک دائرہ کا محیط ہے۔

۴۔ ایک نقطۂ بیرونی سے کرہ کے کتنے مماسی خط کھنچ سکتے ہیں؟ ان خطوں سے کیسی سطح پیدا ہوتی ہے؟ ثابت کرو کہ یہ سب خط ایک دوسرے کے برابر ہیں، نیز ان کے نقاطِ تماس کا طریق دریافت کرو۔

۵۔ ایک ثابت کرہ کو مستوی سطحوں سے کاٹا گیا ہے جو

سب کی سب ایک نقطہ مفروضہ میں سے گذرتی ہیں، تراشوں کے مرکزوں کا طریق دریافت کرو۔ اُن صورتوں میں تمیز کرو جبکہ نقطۂ مفروضہ ثابت کرہ کے (۱) اندر (۲) اوپر (۳) باہر واقع ہو۔

۶۔ ایک ثابت نقطہ و کو ایک مستوی سطح کے کسی نقطہ ن سے ملایا گیا ہے جو و میں سے نہیں گذرتی، اور و ن پر ایک ایسا نقطہ ق لیا گیا ہے کہ و ن × و ق = ایک مستقل مقدار، بتاؤ کہ ق کس سطح پر واقع ہوگا؟

۷۔ معلوم کرو کہ ایک ذوار بعۃ السطوح (چہار سطحی) کے اندر ایک ایسا کرہ کس طرح بن سکتا ہے جو اس کے ہر ایک رخ کو مس کرے۔ ثابت کرو کہ ایسے کُرّے چار ہیں جو کسی ایک رخ اور باقی کے تین مخروجہ رخوں کو مس کریں۔

۸۔ ایک منتظم ذوار بعۃ السطوح کا ہر ایک کنارہ ۲ ل ہے، اس کے بیرونی اور اندرونی کروں کے نصف قطر ر اور ل ہیں، ثابت کرو کہ

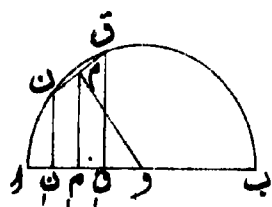
$$ر = ۳ ل = \frac{ل}{۲} \sqrt{۶}$$

۹۔ ایک مستقیم خط کا طول دیا ہوا ہے اور اس کا محل یا مقام فضا میں ثابت کردیا گیا ہے، اُن سب نقطوں کا طریق معلوم کرو جو ایک دی ہوئی مستوی سطح پر واقع ہوں اور جن میں سے ہر ایک پر خطِ مذکور کے محاذی زاویہ قائمہ بنے۔

۱۰۔ اگر ایک کرہ ایک تار کے ذوار بعۃ السطوح میں اس طرح رکھا جا سکے کہ وہ مجسم کے سب کناروں کو مس کرے تو ثابت کرو کہ مقابل کے کناروں کے ہر زوج کا مجموعہ ایک ہی ہے۔

۷۴ — کرہ کی سطح دریافت کرو۔

فرض کرو کہ نصف دائرہ ا ن ب کو قطر ا ب کے گرد گھمانے سے ایک کرہ حاصل کیا گیا ہے جس کا مرکز و ہے اور نصف قطر ر۔

فرض کرو کہ ایک منتظم نصف کثیرالاضلاع (جس کی تعداد اضلاع جفت ہے) نصف دائرہ کے اندر بنایا گیا ہے اور اس کا ایک ضلع ن ق ہے۔

و سے ن ق پر عمود و م نکالو یہ ن ق کی تنصیف کرے گا۔

ق ن م
ا ن۱ م۱ ق۱ و ب

ا ب پر عمود ن ن۱، م م۱، ق ق۱ نکالو

اب جیسے نصف دائرہ ا ب کے گرد گھومیگا ضلع ن ق ایک مخروط ناقص کی منحنی سطح مرتسم کریگا

پس اس مخروط ناقص کی منحنی سطح = ۲π م م۱ × ن ق [دفعہ ۳۵ نوٹ ۱]

اب اگر ن ق اور ن۱ ق۱ کا درمیانی زاویہ ط ہو تو

ن۱ ق۱ = ن ق جم ط = ن ق × (م م۱ / م و)

کیونکہ م م۱ اور م و بالترتیب ن۱ ق۱ اور ن ق پر عمود ہیں

∴ م م۱ × ن ق = و م × ن۱ ق۱

اس لئے مخروطِ ناقص کی منحنی سطح = ۲π × و م × ن۱ ق۱

اگر کثیر الاضلاع کی تعدادِ اضلاع کو لاانتہا بڑھا دیا جائے یعنی ن ق کے طول کو لا انتہا کم کردیا جائے تو اس مخروط ناقص کی سطح بالآخر کرہ کی ایک پیٹی یا منطقہ ہو جائے گی جو قوس ن ق کو محور ا ب کے گرد گھمانے سے حاصل ہوتی ہے۔
نیز اس انتہائی صورت میں دم = ل

∴ پیٹی کا رقبہ = ۲π ر × (ن ق کا ظل ا ب پر)

لیکن کرہ کی سطح اُن سب پیٹیوں کے رقبوں کا مجموعہ ہے جو متواتر اضلاع کو ا ب کے گرد گھمانے سے حاصل ہوں۔
اور سب اضلاع کے ظِلوں کا مجموعہ = ا ب = ۲ ل

اس لئے کرہ کی سطح = ۲π ل × ۲ ل = ۴π ل^۲

نوٹ۔ پس کرہ کی سطح اسکے کبیر دائرہ کے رقبہ کی چار گنی ہوتی ہے

۴۸۔ **تعریف**، جو حصہ متوازی مستوی سطحیں کرہ سے کاٹتی ہیں اس کو کرہ ناقص کہتے ہیں۔ کرہ ناقص کی منحنی سطح **منطقہ** کہلاتی ہے۔

ایک مستوی سطح کرہ کو دو حصوں میں کاٹتی ہے، ان میں سے ہر ایک حصہ کو **قِطعۂ کرہ** کہتے ہیں، قطعہ کی منحنی سطح کو بعض اوقات **ٹوپی** کہتے ہیں۔

ناقص کرہ میں اگر ایک کاٹنے والی مستوی سطح ن نَ اپنے متوازی حرکت کرے اور بالآخر کرہ کی مماسی سطح بن جائے (دفعہ ۳۹) تو اوپر کا ستدیر سرا معدوم ہو جائے گا اور ناقص کرہ ایک قطعۂ کرہ بن جائے گا۔

۴۹۔ دفعہ ۴۷ کی رو سے

منطقہ کا رقبہ = ۲ π ل × (وہ فاصلہ جو مستوی سطحوں کے درمیان ہے)

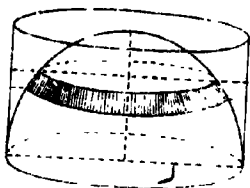
= ۲ π ل ک

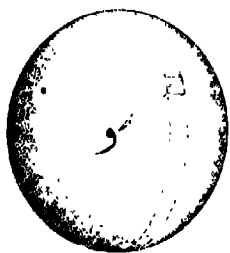
جہاں ل کرہ کا نصف قطر ہے اور ک کرہ ناقص کی موٹائی ہے۔

یہ نتیجہ اس صورت میں ثابت کیا گیا تھا جب موٹائی لاانتہا کم تھی، لیکن پتلے منطقوں کو جمع کرنے سے یہ ضابطہ ک کی تمام قیمتوں کے لئے صحیح ثابت ہو سکتا ہے۔

اسی طرح سے قطعۂ کرہ کی منحنی سطح = ۲ π ل ف، جہاں ل کرہ کا نصف قطر ہے اور ف قطعۂ کرہ کا ارتفاع ہے۔

نوٹ ۱۔ چونکہ منطقہ کا رقبہ صرف کرہ کے نصف قطر اور کرہ ناقص کی موٹائی پر موقوف ہے، اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ایک معینہ موٹائی والے منطقہ کا رقبہ وہی ہوگا خواہ اسے کرہ کے کسی حصہ سے کاٹا جائے۔

نوٹ ۲۔ ایک اسطوانہ کرہ کے گرد بنایا گیا ہے جو دائرہ کبیر پر کرہ کو مس کرتا ہے اور دو متوازی مستوی سطحیں جو اسطوانہ کے محور پر عمود ہیں ایک کرہ ناقص کاٹتی ہیں،

تب منطقہ کا رقبہ اُس پٹی
کے رقبہ کے مساوی ہے جو
اسطوانہ پر اس کے بالمقابل
بنتی ہے کیونکہ ہر ایک رقبہ = ۲ π ر ک
اس لئے کرہ کی کل سطح اس کے گرد بنے ہوئے اسطوانہ
کی منحنی سطح کے مساوی ہے۔

۵۰۔ ایک کرہ کا نصف قطر ر ہے اس کا حجم دریافت کرو

کرہ کی سطح نہایت چھوٹے
حصوں یا اجزا میں تقسیم ہوسکتی
ہے دیکھو شکل۔ اگر رقبہ کے
ان اجزا کو لا انتہا چھوٹا یا کم
کردیا جائے تو ان میں سے
ہر ایک بالآخر ایک مستوی سطح بن جائے گا۔ ایسے ہر ایک
جزو کو ہم ایک ایسے مینار یا مخروط مضلع کا قاعدہ فرض
کرسکتے ہیں جس کا راس مرکز ہو اور جس کا ارتفاع کرہ کا
نصف قطر ہو۔

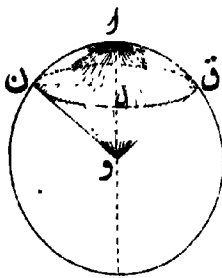
ایک ایسے مینار کا حجم = $\frac{1}{3}$ (سطح کا جزو) × ر
لیکن ایسے کل اجزا کا مجموعہ کرہ کی کل سطح ہے۔
اور ان اجزا کے جواب میں جو مینار بنتے ہیں ان کا مجموعہ
کرہ کا حجم ہے۔

$\therefore$ کرہ کا حجم = $\frac{1}{3}$ (کرہ کی سطح) × ل

= $\frac{1}{3} \times 4\pi$ ل^2 × ل

= $\frac{4}{3}\pi$ ل^3

۵۱ ـ کرہ کا نصف قطر ایک قطعۂ کرہ کے کنارے پر علی التسلسل حرکت کرنے سے ایک مخروطی سطح پیدا کرتا ہے، جو مجسم اس مخروطی سطح اور قطعۂ کرہ کی ٹوپی سے گھرا ہوا ہے اس کو **قطاع کرہ** کہتے ہیں۔ [دیکھو شکل دفعہ ۵۳]

۵۲ ـ دفعہ ۵۰ کے طریق عمل سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ قطاع کرہ کا حجم $\frac{1}{3}$ س ل ہے جہاں س سے قطعۂ کرہ کی ٹوپی کی سطح تعبیر ہوتی ہے۔

۵۳ ـ قطعۂ کرہ ن ا ق کا حجم مجسم قطاع (و، ن ا ق) اور مخروط (و، ن ق) کے فرق کے مساوی ہے۔

فرض کرو کہ کرہ کا نصف قطر ل ہے، مستدیر قاعدہ کا نصف قطر ن ل = ل$_1$ اور قطعۂ کرہ کا ارتفاع ا ل = ف

قطعہ کا حجم = $\frac{ل}{3} \times 2\pi$ ل ف − $\frac{1}{3}\pi$ ل$_1^2$ (ل − ف)

$$= \frac{\pi}{۳} \left\{ ۲ ر^۲ ف - ر_۱^۲ (ر - ف) \right\} \ldots (۱)$$

لیکن $ف (۲ ر - ف) = ر_۱^۲$ [اسکول جومیٹری مسئلہ ۵۷] .... (۲)

مطلوبہ حجم کو ر اور ف کی رقوم میں حاصل کرنے کیلئے $ر_۱^۲$ کی قیمت جو (۲) سے حاصل ہوتی ہے اس کو (۱) میں مندرج کرو

اور حجم کو $ر_۱$ اور ف کی رقوم میں حاصل کرنے کیلئے ر کی قیمت جو (۲) سے حاصل ہوتی ہے اس کو (۱) میں مندرج کرو۔ ہر صورت میں اختصار کرنے سے معلوم ہو گا کہ

$$\text{قطعہ کا حجم} = \pi ف^۲ \left(ر - \frac{ف}{۳}\right) \ldots\ldots (۳)$$

$$= \frac{\pi ف}{۶} \left(۳ ر_۱^۲ + ف^۲\right) \ldots\ldots (۴)$$

۵۴ - ناقص کرہ کا حجم ایسے دو قطعوں کے فرق کے مساوی ہے جن کے ارتفاع $ف_۱$ اور $ف_۲$ ہوں، اور $ف_۱ - ف_۲ = ک$، جہاں ک ناقص کرہ کی موٹائی ہے۔ نتیجہ (۳) استعمال کرنے اور (۲) کے ذریعہ اس کی تحویل کرنے سے معلوم ہو گا کہ

$$\text{ناقص کرہ کا حجم} = \frac{\pi ک}{۶} \left(۳ ر_۱^۲ + ۳ ر_۲^۲ + ک^۲\right)$$

جہاں $ر_۱$ اور $ر_۲$ مستدیر سروں کے نصف قطر ہیں۔

مشقیں کرہ کے متعلق

(عددی)

۱۔ دو کروں کے نصف قطر بالترتیب (۱) ۴٫۲ سمر (۲) ۱۰٫۵ سمر ہیں، قریب ترین مربع سنتی میٹر تک ان کی سطحیں اور قریب ترین مکعب سنتی میٹر تک ان کے حجم دریافت کرو۔

۲۔ ایک نصف کروی گنبد کا قطر ۱۲ میٹر ہے، ۱ شلنگ ۶ پنس فی مربع میٹر کے حساب سے اس پر سونا چڑھانے کی قیمت قریب ترین پنس تک دریافت کرو۔

۳۔ ایک ایسے کرہ کا نصف قطر دریافت کرو جس کی سطح ۸٫۲ سنتی میٹر قطر کے ایک دائرہ کے رقبہ کے مساوی ہے۔

۴۔ دھات کے ایک ٹھوس اسطوانہ کا طول ۴۵ سمر ہے اور قطر ۴ سمر، بتاؤ کہ کتنے ٹھوس کرّے جن کے قطر ۶ سمر ہوں اس اسطوانہ سے بنائے جا سکتے ہیں۔

۵۔ ایک کروی خول کے اندرونی اور بیرونی نصف قطر بالترتیب ۵ سمر اور ۶ سمر ہیں، قریب ترین مکعب سنتی میٹر تک خول کا حجم دریافت کرو۔

۶۔ نصف کرہ کی شکل کے ایک پیالہ کی موٹائی ۱ سمر ہے، اس کا بیرونی قطر ۱۰ سمر ہے، قریب ترین مکعب سنتی میٹر تک

پیالہ کا کل حجم دریافت کرو۔
۷۔ دھات کا ایک ٹھوس کرہ قطر میں ۶ سمر ہے، کرہ کو ڈھالنے سے ایک نالی بنائی گئی ہے جس کا طول ۴ سمر ہے اور بیرونی قطر ۱۰ سمر ہے، نالی کی موٹائی دریافت کرو۔
۸۔ تانبے کے ایک نصف کروی پیالہ کی موٹائی ۱ سمر ہے اور بیرونی قطر ۱۲ سمر، اگر تانبے کے ایک مکعب سنتی میتر تار کا وزن ۸٫۸۸ گرام ہو تو پیالہ کی کل سطح اور وزن دریافت کرو۔
۹۔ ایک کرہ کا نصف قطر ۳٫۵ سمر ہے، اس کو ایک ایسے مجوف اسطوانہ کے اندر رکھا گیا ہے جس کا نصف قطر وہی ہے جو کرہ کا اور جس کا طول اس کے محیط کے مساوی ہے، اسطوانہ کے باقی حصہ میں مکعب سنتی میتروں کی تعداد دریافت کرو۔
۱۰۔ ایک کرہ کی سطح ایک ایسے اسطوانہ کی کل سطح کے مساوی ہے جس کا ارتفاع ۱۶ سمر اور قطر ۴ سمر ہے، قریب ترین ملی میتر تک کرہ کا نصف قطر دریافت کرو۔
۱۱۔ فرض کرو کہ پانی کے قطرے کروی شکل کے ہیں اور ہر قطرے کا قطر $\frac{1}{8}$ انچ ہے۔ بتاؤ کہ ایسے ۵۰۰ قطرے ایک مخروطی شکل کے گلاس کو جس کا ارتفاع اس کے کنارہ کے قطر کے مساوی ہے کتنی گہرائی تک بھر دینگے؟
۱۲۔ ۶ سنتی میتر قطر کے ایک کرہ کو اسطوانہ کی شکل کے ایک ظرف میں جو جزوتہً پانی سے بھرا ہوا ہے ڈالدیا گیا ہے، ظرف کا قطر ۱۲ سمر ہے، اگر کرہ پانی کے اندر پورا ڈوب جائے تو معلوم کرو کہ

پانی کی سطح کتنا اوپر چڑھے گی۔

۱۳۔ دو کروں کے وزنوں کی نسبت ۸ : ۱۷ ہے اور ان کے ایک ایک مکعب فٹ کے وزنوں کی نسبت ۲۸۹ : ۶۴ ہے، کروں کے نصف قطروں کا مقابلہ کرو۔

۱۴۔ سیسہ کی ۵۰۰۰ کروی گولیوں کا تقریبی وزن دریافت کرو، ہر ایک گولی کا قطر ۸ ملی میٹر ہے اور سیسہ کی کثافت اِضافی ۱۱٫۳۵ ہے۔

۱۵۔ تانبے کے ایک کروی خول کا وزن دریافت کرو جس کا بیرونی قطر ۱۲ سمر ہے اور جس کی موٹائی ۲ سمر ہے۔ تانبے کی کثافت اضافی ۸٫۸۸ ہے۔

۱۶۔ تانبے کی اُس مقدار سے جو ۱۸ سنتی میٹر قطر کے ایک ٹھوس کرہ میں موجود ہے کتنے میٹر لمبا تار بنایا جاسکتا ہے جس کا قطر ۰٫۴ ملی میٹر ہو۔

اگر تار کے قطر کو ۵ فیصد کم کردیا جائے تو کتنے فیصد کے حساب سے اس کا طول بڑھ جائے گا؟

۱۷۔ ایک کروی قطعہ نصف دائرہ سے بڑا ہے اور اس کا ارتفاع ۱۸ سمر ہے اور نصف قطر ۱۳ سمر، اس کی کل سطح اور حجم دریافت کرو۔

۱۸۔ ایک کرہ ناقص کے مستوی سروں کے فاصلے مرکزِ کرہ سے اس کے ایک ہی جانب ۶ سمر اور ۸ سمر ہیں، اگر کرہ کا نصف قطر ۲۰ سمر ہو تو ناقص کی کل سطح اور حجم دریافت کرو۔

۱۹۔ ایک کروی منطقہ کے سروں کے نصف قطر ۱۲ سمر اور ۵ سمر ہیں اور منطقہ کی موٹائی ۷ سمر ہے، اس کا رقبہ دریافت کرو۔

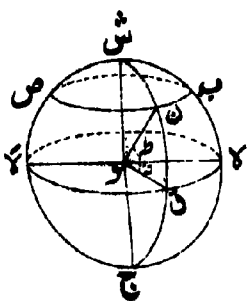
۲۰۔ ایک کرہ جس کا قطر ۲۴ فٹ ہے ایسے رکھا گیا ہے کہ اسکے مرکز کا فاصلہ ایک شخص کی آنکھ سے ۳۷ فٹ ہے، کرہ کی سطح کے اس حصہ کا رقبہ دریافت کرو جو اس کو دکھائی دیتا ہے۔

۲۱۔ فرض کرو کہ زمین ایک کرہ ہے جس کا قطر ۸۰۰۰ میل ہے، منٹوں میں دریافت کرو کہ تقریباً کس بلندی پر سطح زمین کا ایک، دس لاکھواں حصہ دکھائی دے گا۔

۲۲۔ ا ب ایک ایسے دائرہ کی قوس ہے جس کا مرکز و ہے، ثابت کرو کہ قطاع دائرہ و ا ب کو نصف قطر و ا کے گرد گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اس کی منحنی سطح کا رقبہ π (وتر ا ب)^2 ہے۔

۲۳۔ نصف کرہ کے گرد مس کرتا ہوا ایک اسطوانہ بنایا گیا ہے اور اسطوانہ کے اندر ایک مخروط بنایا گیا ہے جس کا راس ایک سرے کے مرکز پر ہے اور جس کا قاعدہ دوسرا مستدیر سرا ہے، ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{اسطوانہ کا حجم}}{۳} = \frac{\text{نصف کرہ کا حجم}}{۲} = \frac{\text{مخروط کا حجم}}{۱}$$

کرہ پر حوالے کے خطوط عرض بلد اور طول بلد

۵۵ ــ اس شکل میں کرہ کا مرکز و ہے اور اس کے ایک قطر ش ج کو محور مانا گیا ہے۔
دائرہ کبیر لا ق لاَ کو جس کا محور ش ج ہے خط استوا کہتے ہیں اور ش اور ج بالترتیب شمالی اور جنوبی قطب کہلاتے ہیں۔

ش ج محور ہوگا اور ش، ج قطب ہونگے اُن سب صغیر دائروں کے جن کی سطحیں خط استوا کے متوازی ہیں، فرض کرو کہ ب ن ص ایک ایسا صغیر دائرہ ہے اور اسکے محیط پر کوئی نقطہ ن ہے۔

ش اور ج میں سے لاانتہا کبیر دائرے کھینچے جا سکتے ہیں، فرض کرو کہ ش ن ج ایک کبیر دائرہ ہے جو ن میں سے گزرتا ہے اور خطِ استوا کو ق پر کاٹتا ہے۔

اب یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے (جیسا دفعہ ۳۷ میں) کہ زاویہ ش و ن اُن سب نقطوں کے لئے مستقل ہے جو دائرہ صغیر ب ص کے محیط پر واقع ہوتے ہیں اس لئے قوس ش ن ایسے سب نقطوں کے لئے مستقل ہے،

قوس ش ن کو نقطہ ن کا شمالی قطبی فاصلہ کہتے ہیں اور چونکہ
زاویہ ش و ق = ۹۰° اس لئے زاویہ ن و ق بھی مستقل ہے
∠ ن و ق کو یا اس کی قوس متناظرہ ن ق کو نقطہ ن کا
عرض بلد کہتے ہیں، اور الفاظ میں اس کی تعریف یہ ہوسکتی ہے
کہ عرض بلد خط استوا سے نقطہ کا کروی فاصلہ ہے۔
چھوٹے دائرہ ب ن ص کو عرض بلد کا متوازی
کہتے ہیں کیونکہ اس کے محیط پر جو نقطے ہیں ان سب کا عرض بلد
ایک ہی ہے۔ شکل میں عرض بلد کو طہ سے تعبیر کیا گیا ہے۔
بڑے دائرے جو قطبین ش اور ج میں سے گزرتے
ہیں ان کے نصف محیطوں (جیسے ش ن ق ج) کو نصف النہار
کہتے ہیں۔
کسی نصف النہار کا مقام بلحاظ ایک اور ثابت نصف النہار
کے اُس زاویہ سے مقرر ہوتا ہے جو ان کی سطحوں کے درمیان
ہو، پس اگر حوالہ کا ثابت نصف النہار ش لا ج ہو تو نصف النہار
ش ن ق ج کے مقام کا تعین زاویہ لا و ق سے ہوسکتا
ہے کیونکہ و لا اور و ق خط تراش ش ج پر عمود ہیں۔
زاویہ لا و ق کو شکل میں فہ سے تعبیر کیا گیا ہے، اس کو
نصف النہار ش ن ق ج کا طول بلد یا اس نصف النہار
پر کے سب نقطوں کا طول بلد کہتے ہیں۔
یہ ظاہر ہے کہ کرہ کی سطح پر کے کسی نقطہ ن کا مقام
ثابت ہو جاتا ہے اگر ہمیں یہ معلوم ہو کہ یہ عرض بلد کے کس

متوازی پر اور طول بلد کے کس نصف النہار پر واقع ہے یعنی اختصاراً اگر یہ معلوم ہو کہ اس کے عرض بلد اور طول بلد کیا ہیں
یہ زاوئی معطیات اُن خطی محددوں کے جواب ہیں جن کی مدد سے ایک مستوی سطح پر کے کسی نقطہ کا تعین ہو سکتا ہے

مشقیں

۱ — ایک کرہ کو عرض بلد طہ پر ایک مستوی سطح سے کاٹا گیا ہے، اگر کرہ کا نصف قطر ر ہو اور مستدیر تراش کا ر‌ا تو ثابت کرو کہ

ر‌ا = ر جم طہ

۲ — فرض کرو کہ خط استوا پر زمین کا نصف قطر ۳۹۶۰ میل ہے چار ہندسوں والی جدولوں کی مدد سے تقریباً معلوم کرو

(۱) خط استوا کا طول

(۲) خط استوا کی اُس قوس کا طول جس کے محاذی زمین کے مرکز پر زاویہ ۱ دقیقہ (منٹ) بنتا ہے۔

(۳) عرض بلد ۵۵° پر کے متوازی کا طول

(۴) زمین کے گھومنے کے باعث لنڈن کتنے میل فی گھنٹہ حرکت کرتا ہے۔ [لنڈن کا عرض بلد = ۵۱° ۳۰']

۳ — عرض بلد طہ پر ایک کرہ (نصف قطر ر) سے ایک مستوی سطح کے ذریعہ ایک قطعہ کاٹا گیا ہے، ضوابط دفعہ ۴۹ اور ۵۳ سے مستنبط کرو

(۱) قطعۂ کرہ کی ٹوپی کی سطح = ۲ ﷺ ر۲ (۱ - جب طہ)

(۲) قطعۂ کرہ کا حجم = ⅓ ﷺ ر۳ (۱ - جب طہ) (۲ - جب طہ - جب۲ طہ)

۴ ۔ ثابت کرو کہ ایک کروی منطقہ کی سطح کا رقبہ جس کے مستوی سروں کے عرض بلد طہ اور طہ ہیں ضابطہ ۲ ۲۲ ر۲ (جب طہ۱ ۔ جب طہ۲) سے حاصل ہوتا ہے۔

۵ ۔ زمین کے اوسط قطر کو ۷۹۲۲ میل مان کر چار ہندسوں والی جدولوں کی مدد سے ذیل کی سطحوں کی تقریبی قیمتیں دریافت کرو

(۱) زمین کی کل سطح

(۲) منطقہ باردہ کی سطح [دائرہ باردہ کا عرض بلد = ۶۶ ½°]

(۳) منطقہ حارہ کی سطح [منطقہ حارہ کے سروں کے عرض بلد = ۲۳ ½° شمالاً اور جنوباً]

۶ ۔ ایک کرہ کا نصف قطر ر ہے، اسکی سطح پر کے کسی نقطہ (لا، ما، ی) کے عرض اور طول بلد طہ اور فہ ہیں، ثابت کرو کہ

لا = ر جم طہ جم فہ

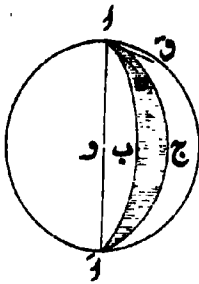
ما = ر جم طہ جب فہ

ی = ر جب طہ

پھانکوں کی منحنی سطحیں

۵۶ ۔ اگر دو مستوی سطحیں ایک کرہ کے مرکز میں سے گذریں تو لازماً وہ ایک دوسرے کو کرہ کے ایک قطر پر قطع کرینگی۔

اس لئے کوئی دو کبیر دائرے لازماً ایک دوسرے کو ایک قطر کے سروں پر قطع کرینگے۔

جس زاویہ پر دو کبیر دائرے ایک دوسرے کو قطع

کرتے ہیں اس کو کردی زاویہ کہتے ہیں۔ اور اس کا ناپ وہ زاویہ ہے جو کسی ایک نقطۂ تقاطع پر دائروں کے مماسوں کے درمیان بنتا ہے۔

پس بڑے دائروں ا ب اَ' ا ج اَ کا درمیانی زاویہ وہ ہے جو مماسات ا ن اور ا ق کے درمیان بنے'، یہ مماس بالترتیب ان دائروں کی سطحوں میں واقع ہیں اور خط تراش ا اَ پر عمود ہیں' اس لئے ان مماسوں کا درمیانی زاویہ' مذکورہ مستوی سطحوں کے دوسطحی زاویہ کا ناپ ہے۔

اس لئے کروی زاویہ کا ناپ وہ دوسطحی زاویہ ہے جو متقاطع کبیر دائروں کی سطحوں کے درمیان بنے۔

۵۷ — تعریف۔ اگر دو مستوی سطحیں ایک کرہ کے قطر پر ایک دوسرے کو قطع کریں تو ان کے درمیان کرہ کا جو مجسم حصّہ منقطع ہوتا ہے اس کو **کرہ کی پھانک** کہتے ہیں۔ پھانک کی منحنی سطح کو **ہلالی سطح** سے بھی موسوم کرتے ہیں' اس سے ظاہر ہے کہ ہلالی سطح کو احاطہ کرنے والے خط دو کبیر نصف دائرے ہوتے ہیں اور ان کے درمیان جو کروی زاویہ بنتا ہے اُسکو **پھانک کی منحنی سطح کا زاویہ** کہتے ہیں۔

۵۸ — کرہ کی پھانک کی منحنی سطح کا رقبہ دریافت کرو۔

یہ آسانی سے معلوم ہوسکتا ہے کہ پھانکوں کی منحنی سطحوں کے

رقبے ان کے کروی زاویوں کے متناسب ہوتے ہیں، نیز کرہ کی کل سطح کو ایک ایسی پھانک کی منحنی سطح خیال کیا جا سکتا ہے جس کا زاویہ ۳۶۰° ہے۔

اس لئے اگر پھانک کی منحنی سطح کا زاویہ د درجے ہو تو

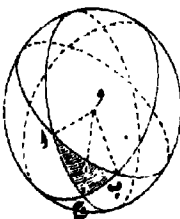
اس کا رقبہ = (کرہ کی سطح) × $\frac{د}{۳۶۰°}$

= ۲π ر^2 × $\frac{د}{۹۰}$

کروی مثلث

۵۹ — تعریف — اگر کرہ کی سطح پر ایک ایسا مثلث بنایا جائے جس کے اضلاع کبیر دائروں کی قوسیں ہوں تو اس کو **کروی مثلث** کہتے ہیں۔

۶۰ — اگر ایک کروی مثلث ا ب ج کے رأسوں کو کرہ کے مرکز و سے ملایا جائے تو تین مستوی سطحیں او ب، ب و ج، ج و ا نقطہ و پر ایک سہ سطحی زاویہ بناتی ہیں جس کا مثلث ا ب ج سے خاص تعلق ہوتا ہے۔

مثلاً کروی مثلث ا ب ج کے اضلاع یا تو قوسوں ا ب، ب ج، ج ا سے تعبیر ہو سکتے ہیں یا طرفی زاویوں

او ب، ب وج، ج وا سے۔

پس معلوم ہوا کہ ایک کروی مثلث کے اضلاع اَ، بَ، جَ درجوں میں ناپے جا سکتے ہیں۔

نیز کروی زوایا ا، ب، ج کے ناپ وہی ہیں جو مجسم زاویہ (و، ا ب ج) کے دوسطحی زاویوں کے ہیں۔

پس کروی مثلث اور سہ سطحی زاویہ کے اس باہمی تعلق سے ہم یہ نتائج اخذ کرتے ہیں۔

(۱) کروی مثلث کے کسی دو اضلاع کا مجموعہ تیسرے ضلع سے بڑا ہوتا ہے۔

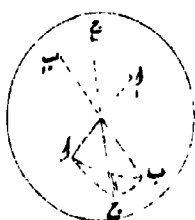
کیونکہ ا ب، ا ج کے ناپ طرفی زاوئے او ب، ا و ج ہیں اور ان زاویوں کا مجموعہ تیسرے طرفی زاویہ ب و ج سے جو ب ج کا ناپ ہے بڑا ہے [مسئلہ ۱۹]

(۲) کروی مثلث کے ضلعوں کا مجموعہ بڑے دائرہ کے محیط سے کم ہوتا ہے۔

کیونکہ طرفی زاویوں ا و ب، ب و ج، ج و ا کا مجموعہ چار قائموں سے کم ہے (مسئلہ ۲۰) اس لئے ان کی متناظر قوسوں کا مجموعہ چار رُبعوں سے کم ہے۔

نوٹ۔ پہلے نتیجہ سے ظاہر ہے کہ ایک کروی کثیر الاضلاع کا کوئی ضلع باقی ضلعوں کے مجموعہ سے کم ہوتا ہے، اور اس لئے کرہ کی سطح پر دو نقطوں کے درمیان چھوٹے سے چھوٹا خط اُس کبیر دائرہ کی چھوٹی قوس ہے جو ان نقطوں میں سے گزرتا ہے، کیونکہ کوئی اور خط

کبیر دائروں کی نہایت ہی چھوٹی قوسوں کا مجموعہ خیال کیا جا سکتا
ہے جبکہ ہر ایک قوس کو لا انتہا کم کر دیا جائے۔

۶۱۔ کروی مثلث اب ج کے راسوں میں سے جو قطر ا اَ، ب بَ، ج جَ
گزرتے ہیں وہ کرہ کی سطح کو ایک کروی مثلث اَ بَ جَ
کے راسوں پر ملتے ہیں، مثلث اَ بَ جَ کو اصلی مثلث کا
متقابل یا متشاکل کہتے ہیں۔

۶۲۔ اب جس طرح سے کہ
سہ سطحی زاویوں (و، ا ب ج)
(و، اَ بَ جَ) کے اجزا جدا
جدا مساوی ہیں لیکن یہ ایک
دوسرے پر منطبق نہیں ہو سکتے [دیکھو صفحہ (۵۱)] اسی طرح
کروی مثلث ا ب ج کے اضلاع اور زاویے اُس کے
متقابل اَ بَ جَ کے اضلاع اور زاویوں کے جداگانہ
مساوی ہیں لیکن اپنے رخوں کی انحنا کی وجہ سے مثلث بالعموم
ایک دوسرے پر منطبق نہیں ہو سکتے۔

کیونکہ اگر ہم ہر مثلث کے محدب رُخ کی طرف دیکھیں تو مثلث
ا ب ج کے راسوں ا، ب، ج کا تواتر گھڑی کی سوئیوں
کی سمت میں ہے لیکن ان کے متقابل راسوں اَ، بَ، جَ کا
تواتر سوئیوں کی متقابل سمت میں ہے۔

اگر مثلث مستوی ہوں تو اس قسم کا اختلاف انطباق سے
پہلے ایک مثلث کو الٹا دینے سے رفع ہو سکتا ہے، لیکن

کروی مثلثوں کو اس طرح الٹانے سے ان کے محدب رخ ایک دوسرے کے سامنے ہوجائینگے اور انطباق ناممکن ہوگا۔

نوٹ۔ ایک متساوی الساقین کروی مثلث اور اس کا متقابل ایک دوسرے پر منطبق ہو سکتے ہیں، کیونکہ فرض کرو کہ ا، ا، رأس ہیں، اس لئے

ا ب = ا ج = ا، ب، = ا، ج،

پس اگر ا، کو ا پر رکھا جائے تو ب، ج پر منطبق کیا جا سکتا ہے اور ج، ب پر۔

۶۳ ۔ اگرچہ کروی مثلث اور اس کا متقابل ایک دوسرے پر بالعموم منطبق نہیں ہو سکتے لیکن وہ رقبہ میں ہمیشہ مساوی ہوتے ہیں۔

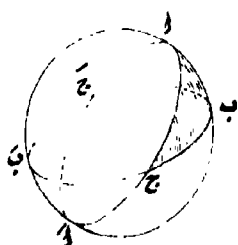
کیونکہ اگر مثلث ا ب ج کو نہایت چھوٹے مثلثوں میں تقسیم کیا جائے تو ان میں سے ہر ایک کے مقابل کا چھوٹا مثلث، ا، ب، ج، میں واقع ہوگا۔

ان متقابل مثلثوں میں سے ہر ایک اگر کافی طور پر چھوٹا ہو تو مستوی خیال کیا جا سکتا ہے اس لئے یہ ایک دوسرے پر منطبق ہو سکتے ہیں۔ پس مثلث ا ب ج رقبہ کے ایسے اجزا پر مشتمل ہے جن میں سے ہر ایک کا مساوی، مثلث ا، ب، ج، میں موجود ہے۔

نوٹ۔ جس طرح ایک مستوی مثلث کے رأسوں کو بیرونی دائرہ کے مرکز کے ساتھ ملانے سے اس مثلث کو تین متساوی الساقین

مثلثوں میں تقسیم کر سکتے ہیں، اسی طرح ایک کروی مثلث ا ب ج
کے راسوں کو مستوی سطح ا ب ج کے قطب کے ساتھ ملانے
سے اس کو ہم تین متساوی الساقین کروی مثلثوں میں تقسیم کرسکتے
ہیں۔ اب ہر مثلث متساوی الساقین کے مقابل ایک مساوی
مثلث متساوی الساقین ہوتا ہے جو اس پر منطبق ہو سکتا ہے
اور ایسے متقابل مل کر مثلث اَ بَ جَ کے مساوی ہیں جو
ا ب ج کا متقابل ہے۔

۶۴ - کروی مثلث کا رقبہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ایک کروی مثلث ا ب ج کبیر دائروں
ا ب اَ، ب ج بَ، ج ا جَ کے تقاطع سے حاصل
ہوتا ہے جہاں نقطے اَ، بَ، جَ
بالترتیب نقاط اُ، ب، ج کے
متقابل ہیں اور اس کا رقبہ
△ سے تعبیر ہوتا ہے۔

اب زاویہ ا والی ہلالی سطح
= △ + اَ بَ جَ
ب والی ہلالی سطح = △ + △ اَ بَ جَ
ج والی ہلالی سطح = △ + △ اَ بَ جَ = △ + △ اَ بَ جَ
(دفعہ ۶۳)

اس لئے جمع کرنے سے

ہلالی سطح ا + ہلالی سطح ب + ہلالی سطح ج

= ۲ △ + { △ + △ اَ ب ج + △ ا بَ ج + △ ا ب جَ }

یا $\frac{\text{ٹ ر}^{۲}}{۹۰}$ { ا + ب + ج } = ۲ △ + نصف کرہ کی سطح

یا $\frac{\text{ٹ ر}^{۲}}{۱۸۰}$ (ا + ب + ج) = △ + ٹ ر۲

∴ △ = $\frac{\text{ٹ ر}^{۲}}{۱۸۰}$ { ا + ب + ج − °۱۸۰ } .... (۱)

نوٹ۔ مثلث کا رقبہ لازماً ایک مثبت مقدار ہے اسلئے (۱) سے ظاہر ہے کہ ا + ب + ج ، °۱۸۰ سے بڑا ہے یعنی کروی مثلث کے زاویوں کا مجموعہ دو قائموں سے زیادہ ہوتا ہے۔

زاویہ ا + ب + ج − °۱۸۰ کو

کروی اضافہ کہتے ہیں اور اس کو ض سے تعبیر کرتے ہیں، اسلئے

△ = $\frac{\text{ٹ ر}^{۲}}{۱۸۰}$ × ض، اگر ض کو درجوں میں ناپا جائے

یا △ = ر۲ × ض، اگر ض کو نیم قطری زاویوں میں ناپا جائے۔

———:*:———

متفرق مشقیں

(نوٹ۔ ذیل کی چند مثالوں میں علاوہ عمل چار ہندسوں والے لوگارتموں کے استعمال سے آسان ہو جاتا ہے)

۱۔ ایک مکعب اور ایک کرہ حجم میں باہم مساوی ہیں، بتاؤ کہ کرہ کے نصف قطر کو مکعب کے ایک ضلع کے ساتھ کیا نسبت ہوگی؟

۲۔ ایک مکعب کا قطر ۴٫۸۵ سنتی میٹر ہے، اُس کرہ کا نصف قطر دریافت کرو جس کی سطح مکعب کی سطح کے برابر ہو۔

۳۔ ایک مخروط کے قاعدہ کا رقبہ ۶٫۹۷ مربع سنتی میٹر ہے اور اس کی بلندی کی نسبت قاعدہ کے نصف قطر کے ساتھ ۱۱ : ۶ ہے مخروط کی سطح اور حجم دریافت کرو۔

۴۔ ایک قائم مخروط اور نصف کرہ کے کناروں کو جوڑنے سے ایک مجسم تیار کیا گیا ہے، نصف کرہ کا نصف قطر ۲ فٹ ہے اور مخروط کی بلندی ۴ فٹ ہے، مجسم مذکور کو پانی کے بھرے ہوئے ایک اسطوانہ کے اندر اس طرح سیدھا رکھا گیا ہے کہ نصف کرہ اسطوانہ کے پیندے کو مس کرتا ہے، اگر اسطوانہ کے قاعدہ کا نصف قطر ۳ فٹ ہو اور بلندی ۶ فٹ تو قریب ترین مکعب فٹ تک اُس پانی کا حجم دریافت کرو جو اسطوانہ میں باقی رہ جاتا ہے۔

۵۔ ایک کرہ کا قطر ۴٫۳۲ سنتی میٹر ہے اور اس کا حجم ایک ایسے مخروط کے حجم کا ۵٫۱۶ گنا ہے جس کی بلندی ۲٫۰۰ سنتی میٹر ہے۔ مخروط کے قاعدہ کا نصف قطر قریب ترین ملی میٹر تک معلوم کرو۔

۶ — ایک مسدس مخروطِ ناقص کی موٹائی ۱۵ سنتی میٹر ہے اور اس کے دونوں سرے بالترتیب ۴۰ سنتی میٹر اور ۴۲ سنتی میٹر کے اضلاع پر مربعے ہیں۔ مجسم مذکور کی مائل سطح اور حجم دریافت کرو۔

۷ — ایک مستدیر اسطوانہ کے اوپر ایک مخروط لگاکر ایک خیمہ تیار کیا گیا ہے، اس کی عمودی دیواروں کی بلندی ۳ء۱۲۴ انچ ہے اور اس کے قاعدہ کا نصف قطر ۱۱۸ انچ ہے، نیز خیمہ کی کل بلندی مخروط کے راس تک ۹ء۲۱۷ انچ ہے، بتاؤ کہ اس کے اندر کتنے مکعب فٹ ہوا ہے۔

۸ — سیسہ کے ایک مخروط کی بلندی ۶ء۲۴ سنتی میٹر ہے، مخروط کو کوٹ کر اس کا ایک ٹھوس کرہ بنایا گیا ہے جس کا قطر ۱۵ سنتی میٹر ہے، مخروط کے قاعدہ کا نصف قطر قریب ترین ملی میٹر تک معلوم کرو۔

۹ — ایک متساوی الاضلاع مثلث کو اس کے ایک ضلع کے گرد گھمانے سے ایک مجسم تیار کیا گیا ہے، اگر مثلث کے ایک ضلع کا طول ۴ء۷ سنتی میٹر ہو تو مجسم کی سطح اور حجم دریافت کرو۔

۱۰ — ایک کمرہ ایک اسطوانہ کی شکل کا ہے اور اس کی چھت ایک نصف کروی گنبد ہے، اندر کی طرف سے کمرہ کا قطر اتنا ہی ہے جتنا کہ فرش سے گنبد کے بالاترین نقطے کا ارتفاع ہے، اگر کمرہ کے اندر ۵۲۳۶ مکعب فٹ ہوا ہو تو کرہ کی بلندی دریافت کرو۔

۱۱ — ثابت کرو کہ ایک کروی خول کا حجم اس مخروط ناقص کے حجم کے مساوی ہوتا ہے جس کی بلندی خول کی موٹائی کا ۴ گنا ہو اور

جن کے مستوی سروں کے نصف قطر خول کے بیرونی اور اندرونی نصف قطروں کے مساوی ہوں۔

۱۲۔ اگر ایک مخروط کا حجم اور کل سطح بالترتیب ح اور س ہوں اور اندرونی دائرہ کی (یعنی اس دائرہ کی جو اس مخروط کے اندر بنایا جائے) سطح اور حجم بالترتیب حَ اور سَ ہوں تو ثابت کرو کہ

ح : حَ = س : سَ

۱۳۔ ایک اسطوانہ کے دونوں سروں پر دو نصف کرے لگائے گئے ہیں جن کے قطر اسطوانہ کے قطر کے مساوی ہیں اور اسطوانہ کا طول اس کے قطر کے مساوی ہے، اگر اس مجسم کا حجم جو اس طرح بنتا ہے ۴۶۴ مکعب سنٹی میٹر ہو تو اس کی سطح دریافت کرو۔

۱۴۔ پانی ایک ایسے نل میں سے گزر کر جس کا قطر ۳۰ سنٹی میٹر ہے ایک حوض میں پڑ رہا ہے، اگر پانی کی رفتار فی ثانیہ ۱۰۲۵ میٹر ہو تو بتاؤ کہ ۲۴ گھنٹے میں کتنے ہزار میٹر پانی حوض میں پڑیگا۔

۱۵۔ اسطوانہ کی شکل کے ایک برتن کی گہرائی ۴۶ سنٹی میٹر ہے اور اندر کی طرف سے اس کا قطر ۸ سنٹی میٹر ہے، اس کو بھرنے کے لئے جسقدر پارہ درکار ہوگا اس کا وزن چار عددوں والی جدولوں کی مدد سے کلوگراموں میں معلوم کرو جبکہ پارہ کی کثافت اضافی ۱۳٫۶ ہو۔

۱۶۔ اگر ایک کرہ کے قطر کو ناپنے میں دونوں طرف اصلی قطر کا ایک فیصد غلطی واقع ہو تو بتاؤ کہ محسوبہ حجم اصلی حجم سے کتنے فیصد زیادہ ہوگا۔

۱۷ — چار ہندسوں والی جدولوں کے ذریعہ جہاں تک ممکن ہو ٹھیک ٹھیک معلوم کرو کہ تانبے کے ۵۹۳ کلوگراموں سے ۰٫۴ ملی میٹر قطر کا کتنے میٹر لمبا تار کھینچ سکتا ہے، جبکہ تانبے کی کثافت اضافی ۸٫۸۸ ہو۔

۱۸ — چار ہندسوں والی جدولوں کے ذریعہ دریافت کرو کہ ۱۰٫۴۵ کلوگرام سیسہ سے ۲٫۶ ملی میٹر قطر کے تقریباً کتنے چھرّے بن سکتے ہیں۔ سیسہ کی کثافتِ اضافی ۱۱٫۳۵ ہے۔

۱۹ — اگر ایک مخروطِ ناقص کی بلندی ف ہو اور اس کے دونوں سروں کے رقبے بالترتیب ا اور ب ہوں تو مخروط ناقص کا حجم ضابطہ

$$ح = \frac{ف}{۳}\left(ا + \sqrt{اب} + ب\right)$$

سے محسوب ہوتا ہے۔ اگر

ف = ۴٫۵ انچ، ا = ۲۸٫۵ مربع انچ، ب = ۷۸٫۶ مربع انچ

تو حجم قریب ترین مکعب انچ تک معلوم کرو۔

یہ ضابطہ ذیل کی صورتوں میں کیا ہو جائے گا جب (۱) ا = ب اور (۲) ا = ۰، ان دونوں صورتوں کی ہندسی تعبیر کیا ہوگی؟

۲۰ — ایک انجن کے جوش دان میں ۳۵۰ نلیاں ہیں جن میں سے ہر ایک کا قطر اندر کی طرف سے ۲٫۵ انچ ہے اور ہر ایک کا طول ۸ فٹ ہے، گرم کرنے والی مجموعی سطح (یعنی اندر کی طرف سے نلیوں کی منحنی سطح) مربع فٹوں میں قریب ترین صحیح عدد تک معلوم کرو۔

۲۱۔ ایک قایم مستدیر مخروط کی پیمائش کرنے سے معلوم ہوا کہ اس کے قاعدہ کا قطر ۲۶،۲" اور ۲۶،۳" کے درمیان ہے اور اس کی بلندی ۵،۴۷" اور ۶،۴۷" کے درمیان ہے، اگر π کی قیمت ۳،۱۴۱۶ لی جائے تو (۱) بڑے ابعاد کی بنا پر اور (۲) چھوٹے ابعاد کی بنا پر مخروط کا حجم محسوب کرو، اگر جواب اعشاریہ کے سات ملحوظ ہندسوں تک نکالا جائے تو بتاؤ کہ ان میں سے کتنے عدد بیکار ہیں۔

۲۲۔ دھات کے ایک مکعب کو جس کا ہر کنارہ ۳۶،۴ سنتی میتر ہے پگلا کر ایک کرہ تیار کیا گیا ہے، چار ہندسوں والی جدولوں سے جہاں تک ممکن ہو سکے کرہ کا قطر صحیح صحیح محسوب کرو۔

۲۳۔ دو کروں کے وزن ۸ : ۱۱ کی نسبت میں ہیں اور اُن کی اضافی کثافتیں بالترتیب ۲۱،۱ اور ۴۲،۰ ہیں، اگر پہلے کرہ کا قطر ۵،۶ سنتی میتر ہو تو دوسرے کرہ کا قطر دریافت کرو۔

۲۴۔ ایک قائم مستدیر مخروط کو قاعدہ کے متوازی دو مستوی سطحیں کاٹتی ہیں اور اس کے ارتفاع کو تین مساوی حصوں میں تقسیم کرتی ہیں، ان ٹکڑوں کے حجموں کا مقابلہ کرو۔

۲۵۔ اگر زمین کو ۷۹۲۶ میل قطر کا ایک کرہ تسلیم کیا جائے تو چار ہندسوں والی جدولوں سے خطِ باردہ شمالی (عرض بلد ۶۶° ۳۲') کا طول جہاں تک ممکن ہو صحیح صحیح دریافت کرو۔

نیز اُس منطقہ کا رقبہ دریافت کرو جو عرض بلد ۶۰° اور عرض بلد ۹۰° کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

۲۶ — ایک کرہ کا قطر ۳۷ء۶۲ انچ ہے، چار ہندسوں والی جدولوں سے اُس بڑے سے بڑے مکعب کا حجم جہاں تک ممکن ہو صحیح صحیح محسوب کرو جو اس میں سے کاٹا جا سکتا ہے۔

۲۷ — ایک مکعب حوض جس کا ہر کنارہ اندر کی طرف سے ۶ فٹ ہے پانی سے بھرا ہوا ہے، اس پانی کے حجم کا ۴۰ء حصہ ہر روز تبخیر سے ضائع ہو جاتا ہے۔ اگر یہ تسلیم کر لیا جائے کہ پانی کی کمی صرف تبخیر کی وجہ سے ہوتی ہے تو بتاؤ کہ ۱۰ دن کے بعد کتنے اونس پانی حوض میں رہ جائے گا۔

۲۸ — سیسہ کے ایک منتظم ذوار بعتہ السطوح کا وزن ۰۷ء۱۰ کلوگرام ہے اور سیسے کی کثافت اضافی ۳۵ء۱۱ ہے، چار ہندسوں والی جدولوں سے اس کے کنارہ کا طول جہاں تک ممکن ہو سکے صحیح صحیح معلوم کرو۔

۲۹ — ذیل کے گردشی مجسموں کو اسطوانوں، مخروطوں یا ناقص مخروطوں کا مجموعہ یا فرق سمجھ کر ان میں سے ہر ایک کا حجم دریافت کرو۔

وہ مجسم جس کی تکوین (۱) ایک متساوی الاضلاع مثلث (ضلع = ا) کو اس کے ایک ضلع کے گرد گھمانے سے ہوتی ہے۔

(۲) ایک متساوی الاضلاع مثلث (ضلع = ا) کو ایک ایسے خط کے گرد گھمانے سے ہوتی ہے جو اس کے راس میں سے قاعدہ کے متوازی کھینچا جائے۔

(۳) ایک مربع (ضلع = ا) کو ایک ایسے خط کے گرد گھمانے سے ہوتی ہے جو مربع کے ایک کونہ میں سے گزرے اور اُسکے ایک قطر

کے متوازی ہو۔

(۴) ایک منتظم مسدس (ضلع = ا) کو ایک ضلع کے گرد گھمانے سے ہوتی ہے۔

ثابت کرو کہ ہر صورت میں حجم اُس منشور کے حجم کے مساوی ہے جسکا قاعدہ گردش کرنیوالی شکل ہو اور جس کی بلندی اس دائرہ کا محیط ہو جس کو گردش کرنیوالی شکل کا ہندسی مرکز مرتسم کرتا ہے۔

۳۰۔ مندرجہ بالا مشق کے آخر میں جو اصول درج ہے اس کو تسلیم کرکے ایک مجسم حلقے کا وزن دریافت کرو جو ۱ $\frac{۱}{۲}$ انچ نصف قطر کے دائرہ کو ایک ایسے خط کے گرد گھمانے سے حاصل ہو جسکا فاصلہ دائرہ کے مرکز سے ۷ انچ ہے۔

تمت

۴۸۶

عددی مشقوں کے جوابات

[ترسیمی عمل میں انتہا درجہ کی احتیاط سے بھی کلیتہً درست نتائج حاصل نہیں ہو سکتے۔ ایسی صورتوں میں جوابات محض تقریبی ہوتے ہیں۔ جو جوابات ذیل میں مندرج ہیں وہ نظری طریق پر محسوب کئے گئے ہیں، لہذا ان کو معیار سمجھ کر طالب علم اپنے نقشہ اور پیمائش کی صحت جانچ لے۔ اگر مندرجہ ذیل جوابات کے لحاظ سے غلطی ایک فیصد کے اندر ہو تو طالب علم اپنے جوابات کو تسلی بخش سمجھے۔]

مشقیں صفحہ (۱۳)

۴۔ ۰٫۷ سنتی میتر ۵۔ ۰٫۳ انچ ' ۲٫۵ انچ

۶۔ (۲) ۴٫۲۴ سنتی میتر (۳) ۶٫۶۵ سنتی میتر

مشقیں صفحہ (۲۳)

۲۔ ۰٫۵ انچ ۶۔ ۰٫۳۲۴

مشقیں صفحہ (۲۶)

۴۔ ۴٫۱ سنتی میتر ' ۵٫۳ سنتی میتر ' ۲٫۱ سنتی میتر '
۰٫۳۸۵ ' ۰٫۳۳۹

مشقیں صفحہ (۴۷)

۴۔ (۱) ۰٫۸۰۰۰

(۲) ۰٫۸۵۷۱

۵۔ ۰٫۲۸۰۰۰

مشقیں صفحہ (۶۲)

۲ ـ ۳، ۴، ۵ ۳ ـ ۱۳

مشقیں صفحہ (۷۳)

۱ ـ ۷۲ مربع فٹ ۲ ـ ۱۷ سنتی میتر، $\frac{15}{17}$، ۴۸ء۱۴۴ مربع سنتی میتر

۴ ـ ۱۰ سنتی میتر، ۴۵ء۵۵ مربع سنتی میتر

مشقیں صفحہ (۷۸)

۱ ـ ۵۰ء۲۵ میتر ۲ ـ ۶۵۰ لیتر، ۵۲۰ کلوگرام ۳ ـ ۶۵ لاکھ

۴ ـ ۱۸۸۱ کلوگرام

مشقیں صفحہ (۸۰)

۱ ـ ۳ء۱۹۶ ۲ ـ ۲۰۴۰۰ کلوگرام

۳ ـ ۸۸ء۴، کلوگرام ۴ ـ ۵۴۴۵

۵ ـ ۸ شلنگ ۴ پنس ۶ ـ ۴۲ء۲۱ کلوگرام

۷ ـ ۵ شلنگ ۱۱ پنس ۸ ـ ۶۵ سنتی میتر، ۶۵ سنتی میتر

۹ ـ ۱ سنتی میتر ۱۰ ـ ۱۲ سنتی میتر، ۱۵ سنتی میتر، ۱۸ سنتی میتر

۱۱ ـ ۷ سنتی میتر، ۶ سنتی میتر، ۵ سنتی میتر

۱۲ ـ ۸ء۵ سنتی میتر، ۲۰۰ مربع سنتی میتر، ۴ء۱۹۲ مکعب سنتی میتر

۱۳ ـ ۱۲ سنتی میتر، ۴ سنتی میتر ۱۴ ـ ۲۹ سنتی میتر

۱۵ ـ ۴ء۱۴ انچ ۱۶ ـ ۲۰۷ مکعب سنتی میتر، ۴۸۰ مربع سنتی میتر

۱۷ ـ ۳۶۰ مکعب سنتی میتر، ۴۳۲ مربع سنتی میتر

۱۸ ـ ۱۲۰۰۰ مکعب سنتی میتر ۱۹ ـ ۶ء۴ مکعب فٹ

۲۰ ـ ۳۷۵۰۰۰ گیلن، ۱۶۷ ٹن ۲۱ ـ ۶۶۱ ۲۳

۲۲ ـ ۶۵ گھنٹے $6\frac{1}{4}$ منٹ

کہ اس کی گہرائی بقدر ۰٫۶ سم کے کم ہو جائے تو قریب ترین مربع ملی میٹر تک ظرف کی اُس سطح کا رقبہ دریافت کرو جو پانی کے ہٹ جانے سے خالی ہوگئی ہے۔

۹۔ ایک مخروطی ظرف دوسرے مخروطی ظرف کے اندر اس طرح رکھا گیا ہے کہ ان کے راس اور محور مشترک ہیں، مشترک راس نیچے کی طرف ہے اور مشترک محور افق پر عمود ہے۔ اندرونی ظرف کو تیل سے اور بیرونی ظرف کے باقی حصہ کو پانی سے ایک ہی ارتفاع تک بھر دیا گیا ہے۔ اگر تیل اور پانی کی سطحوں کے قطر بالترتیب ۰٫۷ سم اور ۱۱٫۲ سم ہوں تو تیل اور پانی کے وزنوں کی باہمی نسبت دریافت کرو جبکہ تیل کی کثافت اضافی ۰٫۹۲ ہو

۱۰۔ ایک ٹھوس اسطوانہ کا طول ۱۰ سم اور قطر ۸ سم ہے، اس کے اندر ہر سرے پر ایک مخروطی جوف بنایا گیا ہے جس کا قطر ۶ سم ہے اور ارتفاع ۴ سم، باقی مجسم کی کل سطح قریب ترین مربع سنٹی میٹر تک دریافت کرو۔

کرہ

۳۶۔ **تعریف**۔ کرہ وہ مجسم ہے جو نصف دائرہ کو اُس کے قطر کے گرد گھمانے سے حاصل ہوتا ہے جبکہ قطر کو بطور محور ثابت کر دیا جائے۔

مثلاً اگر نصف دائرہ ان ب
کو قطر و ب کے گرد گھمائیں تو
نصف محیط ان ب ایک کرہ
کی سطح مرتسم کرے گا۔
نیز جب نصف محیط قطر کے گرد
گھومتا ہے تو محیط پر کا ہر نقطہ
مرکز و سے مستقل فاصلہ پر رہتا ہے
اس لئے معلوم ہوا کہ ایک ایسے نقطہ کا طریق یا مکان جو فضا
میں حرکت کرتا ہے اور اثنائے حرکت میں ایک ثابت نقطہ
سے مستقل فاصلہ پر رہتا ہے ایک کرہ کی سطح ہے۔
ثابت نقطہ کو کرہ کا مرکز اور مستقل فاصلہ کو نصف قطر
کہتے ہیں، قطر وہ خط مستقیم ہے جو مرکز میں سے گذرتا ہے
اور دونوں طرف کرہ کی سطح پر ختم ہوتا ہے، پس سب قطر
ایک دوسرے کے مساوی ہوئے۔

۳۷۔ کرہ کی ہر مستوی تراش دائرہ ہوتی ہے۔

شکل بالا میں فرض کرو کہ ایک سطح مستوی ق ن ر
کرہ کو کاٹتی ہے، اور کرہ کا مرکز و ہے اور نصف قطر
ر۔ نیز فرض کرو کہ خطِ تراش پر کوئی نقطہ ن ہے۔
کاٹنے والی سطح پر عمود و ل نکالو اور فرض کرو کہ
اس کا طول ط ہے، و ن، ن ل کو ملاؤ
اب چونکہ مستوی ق ن ر میں و ل، ل ن پر عمود ہے

$$\therefore \text{ن ل}^2 = \text{و ن}^2 - \text{و ل}^2$$

$$= \text{ر}^2 - \text{ط}^2$$

$$\therefore \text{ن ل} = \sqrt{\text{ر}^2 - \text{ط}^2} = \text{مستقل مقدار}$$

اس لئے ن کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز ایک ثابت نقطہ ل ہے

تعریف۔ قطر ا ب کو جو مستوی تراش ق ن ر پر عمود ہے تراش کا محور کہتے ہیں اور اس کے سرے ا، ب تراش کے قطب کہلاتے ہیں۔

۳۸۔ اگر مستوی تراش کرہ کے مرکز میں سے گذرے تو ل مرکز و پر منطبق ہوگا اور اس صورت میں دائرہ ق ن ر کا نصف قطر بڑے سے بڑا ہوگا یعنی کرہ کے نصف قطر کے مساوی ہوگا۔

جس خط پر مرکز میں سے گذرنے والی مستوی تراش کرہ کو کاٹتی ہے اس کو دائرۂ کبیر کہتے ہیں، باقی سب مستوی تراشیں صغیر دائرے کہلاتی ہیں۔

۳۹۔ ایک کرہ کا نصف قطر ر ہے، اگر اس کی ایک مستوی تراش کا نصف قطر ر، ہو اور اس تراش کا فاصلہ مرکز سے ط ہو تو یہ ثابت ہو چکا ہے کہ

$$\text{ر}_1 = \sqrt{\text{ر}^2 - \text{ط}^2}$$

پس اگر یہ مستوی تراش مرکز و سے باہر کی طرف اپنے متوازی حرکت کرے تو ط کے بڑھنے سے ل گھٹیگا پس اگر ایک کرہ کی مستوی تراش کا فاصلہ مرکز سے بڑھتا جائے تو اس تراش کا نصف قطر بتدریج گھٹتا جائے گا اور بالآخر جب ل نقطہ ا پر منطبق ہوگا، تو ل معدوم ہو جائے گا یعنی اس وقت مستوی سطح کرہ کو صرف ایک نقطہ ا پر قطع کرے گی، اس کو اس طرح بیان کرتے ہیں کہ مستوی سطح اس حالت میں نقطہ ا پر کرہ کی مماسی سطح ہے، پس معلوم ہوا کہ کرہ کی سطح کے کسی نقطہ پر صرف ایک مماسی سطح ہو سکتی ہے اور یہ وہ مستوی سطح ہوتی ہے جو نقطہ مذکور میں سے گذرنے والے نصف قطر پر عمود ہو۔

۰۴ ۔ اگر مماسی سطح میں اس کے نقطۂ تماس میں سے ایک مستقیم خط کھینچا جائے تو وہ کرہ کی سطح کو صرف ایک نقطہ پر ملیگا، اس کو یوں بیان کرتے ہیں کہ یہ خط کرہ کو اس نقطہ پر مس کرتا ہے، پس کرہ کے کسی نقطہ پر بے شمار مماسی خط کھینچے جا سکتے ہیں اور ان میں سے ہر ایک اس نقطہ میں سے گذرنے والے نصف قطر پر عمود ہوتا ہے۔ پس اگر ایک مماسی خط کو اس کے نقطۂ تماس میں سے گذرنے والے نصف قطر کے گرد گھمایا جائے تو ظاہر ہے کہ اس کے گھومنے سے مماسی سطح

پیدا ہوگی۔

۴۱۔ اگر ا ب ایک کرہ کا قطر ہو تو ایسا دائرہ کبیر صرف ایک ہوسکتا ہے جس کا محور ا ب ہو اور ایسے کبیر دائرے بیشمار ہو سکتے ہیں جو قطبین ا اور ب میں سے گذریں۔

۴۲۔ کرہ پر کے دو مفروضہ نقطوں میں سے (جو ایک قطر کے سرے نہ ہوں) ایک اور صرف ایک کبیر دائرہ کھینچ سکتا ہے کیونکہ دائرہ کے مرکز اور ان دو نقطوں میں سے گذرنے والی مستوی سطح صرف ایک ہو سکتی ہے جو کرہ کو ایک کبیر دائرہ پر کاٹے۔

نوٹ۔ کرہ کی سطح پر کے دو نقطوں میں سے جو کبیر دائرہ گذرتا ہے اس کی چھوٹی قوس کو ان نقطوں کا کروی فاصلہ کہتے ہیں۔ یہ آگے (صفحہ ۱۵۵ پر) ثابت کیا جائے گا کہ یہ قوس چھوٹے سے چھوٹا خط ہے جو ان نقطوں کے درمیان کرہ کی سطح پر کھینچا جاسکتا ہے۔ اب چونکہ کرہ کے سب کبیر دائرے مساوی ہوتے ہیں اس لئے کسی کبیر دائرہ کی ایک قوس اس زاویہ سے تعبیر ہو سکتی ہے۔ جو قوس مذکور کے محاذی مرکز پر بنتا ہے

[مسئلہ اثباتی ۶۹، اسکول جومیٹری]

پس شکل دفعہ ۳۸ میں نقاط ق اور ج کا کروی فاصلہ زاویہ ق و ج سے تعبیر ہوسکتا ہے اور درجوں میں ناپا جاسکتا ہے کبیر دائرہ ج د پر کے کسی نقطہ کا کروی فاصلہ قطب ا سے ۹۰° ہے۔

۴۳۔ کرہ کی سطح پر کے کسی تین نقطوں میں سے صرف ایک دائرہ (ضروری نہیں کہ یہ کبیر ہو) کرہ کی سطح پر کھینچ سکتا ہے کیونکہ ان تین نقطوں سے صرف ایک مستوی سطح کا تعین ہوگا جو کرہ کو ان نقطوں میں سے گذرنے والے ایک دائرہ پر کاٹے گی۔

۴۴۔ دو نقاط مفروضہ میں سے لاانتہا کرے گذر سکتے ہیں اور ان سب کے مرکز ایک ثابت مستوی سطح پر واقع ہوتے ہیں

اگر ق اور ر مفروضہ نقطے ہوں تو ظاہر ہے کہ وہ سب نقطے جو ق اور ر سے متساوی الفصل ہوں ایک مستوی سطح پر واقع ہوں گے جو مستقیم خط ق ر کی زاویہ قائمہ پر تنصیف کرے گی۔ اس لئے اس سطح پر کے کسی نقطہ کو مرکز مان کر ایک کرہ کھینچ سکتا ہے جو ق اور ر میں سے گذرے۔

۴۵۔ تین نقاطِ مفروضہ میں سے لاانتہا کرے گذرتے ہیں اور ان کے مرکز ایک ثابت مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں۔

شکل دفعہ ۳۸ میں فرض کرو کہ تین نقطے ن، ق، ر ہیں اور ان میں سے گذرنے والے دائرہ کا مرکز ل ہے، فرض کرو کہ خط ا ب نقطہ ل میں سے گذرتا ہے اور ن، ق، ر کی سطح مستوی پر عمود ہے۔ اب اگر ا ب پر کوئی

نقطہ و لیا جائے تو یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے
کہ مثلثات ون ل، وق ل، ور ل ہر طرح سے
ایک دوسرے کے برابر ہیں، اسلئے ون = وق = ور
پس ا ب پر کے کسی نقطہ کو مرکز مان کر ایک کرہ ن، ق، ر
میں سے کھینچ سکتا ہے، دوسرے الفاظ میں نقاط ن، ق، ر
میں سے بیشمار کرے کھینچ سکتے ہیں اور ان کے مرکزوں کا
طریق ایک مستقیم خط ا ب ہے جو مثلث ن ق ر کی
سطح پر عمود ہے اور اس مثلث کے بیرونی دائرہ کے مرکز
میں سے گذرتا ہے۔

۶۴۔ ایسے چار نقطوں میں سے جو ایک ہی مستوی سطح پر
واقع نہ ہوں صرف ایک کرہ گذر سکتا ہے۔

فرض کرو کہ چار نقطے ا، ب، ج، د ایک ہی سطح پر واقع
نہیں ہوتے اور مثلث ا ب ج، ا د ج کے بیرونی
دائروں کے مرکز ف، گ ہیں۔

فرض کرو کہ نقاط ف اور گ سے مستویات اب ج اور ا د ج پر بالترتیب عمود ف س اور گ ک نکالے گئے ہیں۔

تب ف س پر کا ہر نقطہ ا، ب، ج سے متساوی الفصل ہے، اور گ ک پر کا ہر نقطہ ا، د، ج سے مساوی فاصلہ پر ہے، اس لئے خطوط ف س اور گ ک میں سے ہر ایک کا ہر نقطہ ا اور ج سے مساوی فاصلہ پر ہے لیکن وہ سب نقطے جو ا اور ج سے متساوی الفصل ہیں ایک مستوی سطح پر واقع ہوتے ہیں جو ا ج کی زاویہ قائمہ پر تنصیف کرتی ہے۔

اس لئے ف س اور گ ک دونوں اس مستوی میں واقع ہوتے ہیں اور چونکہ وہ متوازی نہیں ہو سکتے (کیونکہ وہ دو متقاطع سطوح مستویہ پر جداگانہ عمود ہیں) اس لئے وہ لازماً ایک دوسرے سے کسی نقطہ و پر ملینگے۔

پس ف س اور گ ک کا ایک ہی مشترک نقطہ و نقاط ا، ب، ج، د چاروں سے مساوی فاصلہ پر ہوگا۔

پس اگر و کو مرکز اور و ا کو نصف قطر مان کر ایک کرہ کھینچا جائے تو وہ ا، ب، ج، د میں سے گذریگا اور یہ ایک ہی کرہ ہے جو ان چار نقطوں میں سے گزر سکتا ہے۔

۲۳- (۱) ۳:۴ (۲) ۷۱۷، ۱۰۰۰

۲۴- ۴۵۹ دن

مشقیں صفحہ (۹۳)

۲ - (۱) ۹۱٫۳۸ مربع انچ (۲) ۸۴ مکعب انچ

۳ - (۱) ۳۰۸ مکعب سنتی میٹر (۲) ۲۸۰ مکعب سنتی میٹر

۴ - (۱) ۹٫۸۵ انچ (۲) ۱۰٫۶۳ انچ

۵ - (۱) ۲۲۳٫۶ مربع سنتی میٹر (۲) ۳۳۳٫۳ مکعب سنتی میٹر

۶ - ۸ سنتی میٹر، ۱۱۵۲ مکعب سنتی میٹر

۷ - (۱) ۰٫۲۸ (۲) ۰٫۴۹ مربع انچ

۸ - (۱) ۵٫۸ سنتی میٹر (۲) ۲۸٫۸۷ مربع سنتی میٹر

(۳) $\frac{1}{2}$ ، °۶۰

۹ - ۸٫۷ سنتی میٹر

مشقیں صفحہ (۱۰۴)

۱- ۳۷۷٫۴۰۰ مکعب سنتی میٹر، ۱۵٫۶۱۲، ۱۶٫۰۵۰،

۴٫۳۱ فیصد، ۴٫۰۸ فیصد

۲- $\frac{1}{2}$۸۷ پونڈ ۳- °۳۶ ۵۲آ

۴ - (۱) ۱۰۴٫۶ مربع سنتی میٹر (۲) ۱۱۰٫۸ مکعب سنتی میٹر

۵ - ۴٫۲ سنتی میٹر، ۵۰٫۹ مکعب سنتی میٹر

۶ - ۳۸۴ رقبہ کی اکائیاں ۷-۱۶۲۲٫۴ مکعب سنتی میٹر ۱۲ - ۰٪ ۳۲

مشقیں صفحہ (۱۱۱)

۱- (۱) ۱۵۱ مربع سنتی میٹر، ۲۲۶ مکعب سنتی میٹر

(۲) ۲۰۴ مربع سنتی میتر، ۵۸۴ مکعب سنتی میتر

۲ ــ ۵۲۸ مربع سنتی میتر

۳ ــ ۱۲۲ مکعب سنتی میتر

۴ ــ ۱۲۳ مربع سنتی میتر ۵ ــ ۵۲۸ مربع سنتی میتر

۶ ــ ۲۰٫۱۰ میتر ۷ ــ ۰٫۰۰۶ انچ

۸ ــ ۵۰۰۰ مکعب سنتی میتر، ۱۵٫۹ سنتی میتر

۹ ــ ۷ مکعب فٹ ۱۰ ــ ۱٫۸۸ کلوگرام

۱۱ ــ ۱۸٫۸۵ میتر، ۹٫۵۲۵ گرام

مشقیں صفحہ (۱۱۹)

۲ ــ (۱) ۱۸۸ مربع سنتی میتر، ۳۰۲ مکعب سنتی میتر

(۲) ۱۴ مربع سنتی میتر، ۵ مکعب سنتی میتر

۳ ــ ۱۴۱۴ مربع سنتی میتر ۴ ــ ۲۷ مکعب سنتی میتر

مشقیں صفحہ (۱۲۵)

۱ ــ ۸۱۶ مربع سنتی میتر ۲ ــ ۱۱۰ مربع سنتی میتر

۳ ــ ۱۴۸ مکعب سنتی میتر ۴ ــ ۹۷ مربع سنتی میتر، ۸۸ مکعب سنتی میتر

۵ ــ ۱۲۲٫۲ مربع سنتی میتر ۶ ــ ۱۴۰ مکعب سنتی میتر

۹ ــ $\frac{ن^{3} - (ن - 1)^{3}}{ن^{3}}$ ۱۰ ــ ۱۰ سنتی میتر، ۵ سنتی میتر

مشقیں صفحہ (۱۲۷)

۱ ــ ۲۰ مکعب سنتی میتر ۲ ــ ۲۶۸ گز ۱ فٹ

۳ ــ ۵٫۴ میتر ۴ ــ ۱۰۱۷ مربع سنتی میتر

۵۔ ۱۵ منٹ ۱۲ سکنڈ ۶۔ ۱ : ۲

۷۔ ۱۸ مربع سنتی میتر ۸۔ ۳۷۶٫۹۹ مربع سنتی میتر

۹۔ ۲۳ : ۳۹ ۱۰۔ ۳۹۰ مربع سنتی میتر

مشقیں صفحہ (۱۴۵)

۱۔ (۱) ۷۲ مربع سنتی میتر، ۵۸ مکعب سنتی میتر

(۲) ۱۳۸۵ مربع سنتی میتر، ۱۸۴۹ مکعب سنتی میتر

۲۔ ۱۶ پونڈ ۱۹ شلنگ ۴ پنس ۳۔ ۰٫۷ سنتی میتر

۴۔ ۱۵ ۵۔ ۳۸۱ مکعب سنتی میتر

۶۔ ۲۸۶ مکعب سنتی میتر ۷۔ ۱ سنتی میتر

۸۔ ۴۱۸ مربع سنتی میتر، ۱٫۶۹۴ کلوگرام

۹۔ ۶۶۷ مکعب سنتی میتر ۱۰۔ ۲٫۴ سنتی میتر

۱۱۔ ۱ انچ ۱۲۔ ۱ سنتی میتر

۱۳۔ ۸ : ۱۷ ۱۴۔ ۱۵۲ کلوگرام

۱۵۔ ۵٫۶۵۴ کلوگرام ۱۶۔ ۲۴۳۰۰ میتر، ۱۰٫۸ فیصد

۱۷۔ ۱۹۲۲٫۶۶ مربع سنتی میتر، ۷۱۲۵٫۱۵ مکعب سنتی میتر

۱۸۔ ۴۳۹٫۸۲ مربع سنتی میتر، ۳۱۸٫۳۵ مکعب سنتی میتر

۱۹۔ ۵۷۱٫۷۷ مربع سنتی میتر

۲۰۔ ۶۱۱٫۳ مربع فٹ ۲۱۔ ۴۲ فٹ

مشقیں صفحہ (۱۵۱)

۲۔ (۱) ۲۴۸۸۰ میل (۲) ۱٫۱۵۲ میل

(۳) ۱۴۲۷۰ میل (۴) ۶۴۵ میل

۵- ۱۹۷۱۰،۰۰۰ مربع میل (۲) ۸۱۷۲۰۰۰ مربع میل

(۳) ۷۸۵۹،۰۰۰ مربع میل

مشقیں صفحہ (۱۶۰)

۱- ۳۱ : ۵۰　　۲- ۲۳ سنتی میتر

۳- ۲۰۴ مربع سنتی میتر، ۳۳۲ مکعب سنتی میتر

۴- ۱۳۶ مکعب فٹ　　۵- ۶،۶ سنتی میتر

۶- ۲۸۰۳ مربع سنتی میتر، ۱۵۶۸۰ مکعب سنتی میتر

۷- ۳۹۳۷ مکعب فٹ　　۸- ۳،۸ سنتی میتر

۹- ۲۹۸ مربع سنتی میتر، ۳۱۸ مکعب سنتی میتر

۱۰- ۲۰ فٹ　　۱۳- ۳۱۵ مربع سنتی میتر

۱۴- ۴۰۰۰ ۳۶۷　　۱۵- ۴۳،۷۵ کلوگرام

۱۶- ۰،۳ فیصد تقریباً　　۱۷- ۵۳۱۵۰۰ میتر

۱۸- ۱۰۰۰۰۰　　۱۹- ۲۳۲ مکعب انچ

۲۰- ۱۸۳۳ مربع فٹ

۲۱- ۱۸۸۹ مکعب انچ، ۱۹۲۰ مکعب انچ

معطیات سے صرف ۴ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب حاصل ہوسکتا ہے

۲۲- ۴۵،۱۶ سنتی میتر ۲۳- ۷،۷ سنتی میتر ۲۴- ۱ : ۷ : ۱۹

۲۵- ۹۹۲۶ میل، ۳۹۶۷۰۰۰ مربع میل

۲۶- ۱۰۲۵۰ مکعب انچ ۲۷- ۱۴۳۷۰۰ اونس ۲۸- ۲۰،۰۰ سنتی میتر

۲۹- (۱) $\frac{۴}{۳}$ (۲) $\frac{۱}{۲}$ ۱۴ (۳) ۱۴ : ۲۶ (۴) $\frac{۹}{۲}$ ۱۴ : ۳

۳۰- ۴۲۳،۱۶ مکعب انچ

1. Axioms	علوم متعارفہ
2. Concurrent	متراکز
3. Concurrency	تراکز
4. Collinear points	مسامت نقطے
5. Corollary	نتیجہ صریح - فرع
6. Correspondence	تناظر
7. Correspouding	متناظر
8. Co-planer	ہم سطح
9. Dihedral angle	دو سطحی زاویہ
10. Edge	کنارہ
11. Face	رُخ
12. Frustrum (of a cone)	مخروطِ ناقص
13. Generation	تکوین

14. Great circle	کبیرہ دائرہ
15. Hypothetical construction	عمل مفروضہ
16. Icosa hedron	بست سطحی (بیس سطحی)
17. Latitude	عرض بلد
18. Longitude	طول بلد
19. Lune	ہلالی سطح ۔ پھانک کی منحنی سطح
20. Octahedron	ہشت سطحی
21. Parallels	متوازیات
22. Parallelopiped	متوازی السطوح
23. Plane	سطح مستوی (مستوی)
24. Polyhedron	کثیر السطوح
25. Pyramid (right; Oblique)	مخروط مضلع (قائم مائل)
26. Prism	منشور
27. Prismoid	منشور نما
28. Side-face	طرفی رُخ یا پہلو
29. Skew	معوج یا کانا
30. Sense	رُخ
31. Solid	مجسم
32. Solids of Revolution	گردشی مجسمات
33. Solid angle	مجسم زاویہ
34. Solid geometry	ہندسۂ مجسمات

35. Spherical triangle	کروی مثلث
36. Superposition	انطباق
37. Trihedral angle	سہ سطحی زاویہ
38. Tetrahedron	ذوالاربعۃ السطوح (چہار سطحی)
39. Volume	حجم
40. Wedge	فانہ
41. Zone	منطقہ